

I. rész

**A FÉNY ÉS MOZGÁSA
MEREV METRIKUS
TEREKBEN**

1. fejezet

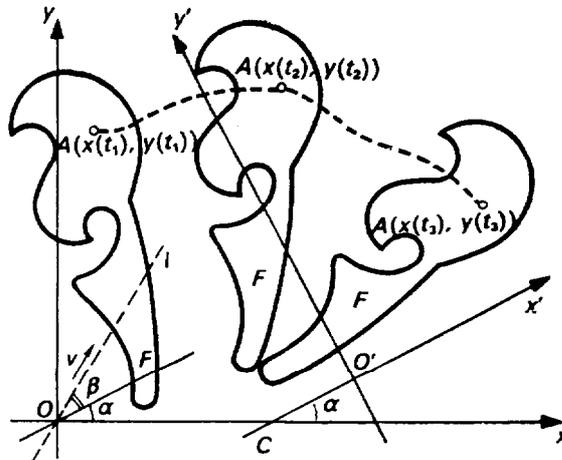
Relativitás elmélet

1.1. GALILEI RELATIVITÁS XIX. SZÁZAD

XIX. század végén a fizika elméletének fontos és megválaszolatlan problémája volt a fény hordozó közegének mibenléte és sebessége eltérő sebességű inercia rendszerekben. A problémával kapcsolatban sok kísérletet végeztek, (megpróbálva kimutatni a Föld sebességét a feltételezett hordozóhoz viszonyítva), de sikertelenek voltak. A Föld sebességét a nyugvó éterhez képest nem tudták kimutatni.

A kísérletek eredményei az általános felfogás alapján nem voltak magyarázhatók, és nem illettek bele a *Newton*-nak tulajdonított abszolút-téridő—abszolút-mozgás rendszerébe. És kifejezetten ellenkezett *GALILEI NEVEZETES RELATIVITÁSI ELVÉVEL ÉS GEOMETRIÁJÁVAL*:

(Galileo Galilei: Dialogo.... i dul e Massimi Sistemidel Monodo Tolema-cio e Copernicano, 1632.)* E méltán ismert, gyakran idézett részlet a mechanika egyik alapelvének színes, művészi leírása. Ezt az elvet ma Galilei-féle relativitási elvnek nevezzük. Röviden a következőt állítja: a fizikai rendszer egyenes vonalú egyenletes mozgását a rendszeren belül semmiféle fizikai kísérlettel nem lehet kimutatni. Két, egymáshoz viszonyítva egyenes vonalban, egyenletesen mozgó „laboratóriumban” (például a horgonyon álló, illetve haladó hajó, amiről Galilei beszél) az ott tartózkodó megfigyelők szerint tehát a mechanikai jelenségek tökéletesen azonos módon játszódnak le, nem különböznek egymásról. A Galilei-féle relativitási elvből következik, hogy a testek mechanikai tulajdonságai a fizikai rendszer minden olyan transzformációjával szemben invariánsak, amely a fizikai rendszernek egy állandó nagyságú és irányú sebességet ad (ezeket a transzformációkat nevezzük Galilei-transzformációnak.) Más szóval a (mozgásban lévő) testek tulajdonságai közül csak azoknak van mechanikai tartalmuk, amelyek nem változnak a Galilei-transzformáció során. (Vö. ezt a „geometriai tulajdonságoknak” mint egybevágóságoknál megmaradó mennyiségeknek 1.§-beli értelmezésével). Galilei relativitási elvét „geometrízálni” lehet. E forma révén közvetlenül összekapcsolható a geometria kleini meghatározásával. Az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk síkbelinek mondható mechanikai jelenségekre, a fizikai objektumok mozgásait vizsgáljuk például a földfelület egy korlátos darabján, amelyet még síknek tekinthetünk. A síkon szokás szerint felvesszünk a $-x,y-$ derékszögű, Descartes-féle koordináta-rendszert. Ekkor egy A pont mechanikai



3 ábra

1. ábra.

mozgását leíró formula a pont x, y , koordinátáinak időbeli változását mutatja:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \tag{1}$$

ahol t az idő. [Az F alakzatnak minden egyes $A=A(x, y)$ pontjára]. Térjünk át egy másik $\{x', y'\}$ koordináta-rendszerre az $0x$ és $0y$ tengelyek valamilyen α szögű elforgatásával és 0 kezdőpontnak az $0'$ kezdőpontba való eltolásával jön létre. (3. ábra) Magától értetődik, hogy ez a koordináta transzformáció semmiképp sem lehet kihatással a fizikai törvények tartalmára, tehát a fizikai törvényeknek azonos alakúaknak kell lenniök az $\{x, y\}$, illetőleg az $\{x', y'\}$ koordinátákban.

....A Galilei-féle relativitási elv még ennél is többet követel a kétféle koordináta-rendszerbeli leírás akkor is tökéletesen azonos az összes mechanikai rendszerre, ha az $\{x', y'\}$ koordináta-rendszer tengelyei és origója egyenes vonalban mozognak az $\{x, y\}$ koordináta-rendszerhez képest, vagy ami ugyanaz a „rég” rendszer egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az „újhoz” viszonyítva. Ha azonban $\{x, y\}$ origója az x' -tengellyel β szöget bezáró l egyenes mentén v sebességgel halad (lásd a 3. ábrát), akkor a t időpontban.....

$$t' = t + d$$

....az A pont - új- és -rég- koordinátái közötti kapcsolatot az

$$\boxed{x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + (v \cos \beta) t + a} \quad (2)$$

$$\boxed{y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + (v \sin \beta) t + b}$$

összefüggések fejezik ki. Azok az összefüggések, amelyek mechanikai szemzőből értelmes jelenségeket írnak le, eszerint a (2) transzformációk előtt ugyanolyan alakúak, mint e transzformációk után (ahogy a matematikusok mondani szokták, invariánsak a (2) transzformációkkal szemben). A (2) képleteket még egy kicsit ki lehet egészíteni. Ahogy az A(x,y) pont mozgástörvényét megadó (1) összefüggésekben, ugyanígy a (2) képletekben is az x és y koordináták mellett megjelenik a t idő is, hiszen a geometriai és mechanikai mozgások éppen abban különböznek, hogy a fizikában figyelembe vesszük a geometriában mellőzött időbeliséget. Persze nyilván nem befolyásolhatja egy fizikai törvény alakját, hogy mikortól kezdjük számolni az időt....

.... Ezért (2)-höz csatolni kell az időmérés kezetének áthelyezését kifejező

$$t' = t + d$$

összefüggést, ahol d a „rég-” időszámítás kezdőpontja (t=0) az „új” időszámítás szerint. Ily módon az

$$\boxed{x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + (v \cos \beta) t + a} \quad (3)$$

$$\boxed{y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + (v \sin \beta) t + b}$$

$$\boxed{t' = t + d}$$

kifejezéseket nyerjük. A (3) összefüggést keretbe foglaltuk, fontosságának kiemelésére: a képletekkel írható le.

Az előző paragrafus ... képleteihez hasonlóan a (3) képleteket is kétféleképpen értelmezhetjük.

Egyfelől kijelölik az (x,y,t) vonatkoztatási rendszerről az (x',y',t') vonatkoztatási rendszerre való áttérés mikéntjét, és a (különböző α, β, v ; a, b, d paraméterű) (3) transzformációkkal összekapcsolt koordinátarendszerek ekvivalensek is. Bennük a mechanikai törvények a lehető legegyszerűbb, „legtermészetesebb” alakot öltik. Ezen a következőt értjük: a kiindulási (x,y) koordináta-rendszer mellett vizsgáljunk meg egy olyan (x',y') koordináta-rendszert is amely hozzá képest bonyolultabb, nem egyenes vonalú egyenletes mozgással mozog, például — összsebességgel forog a régi koordináta-rendszer kezdőpontja körül.... A mozgásban lévő (x, y) koordináta-rendszerben rögzített testre járulékos erők, a koordináta-rendszer mozgásából eredő ún. tehetetlenségi erők hatnak. A járulékos erő esetünkben a mozgás centrumától kifelé mutató-centrifugális-erő. Vilamoson utazva a jármű kanyarodásakor jól érezhetjük ezt (a villamoshoz rögzített koordináta-rendszerhez viszonyítva mi nyugalomban vagyunk).

A tehetetlenségi (inerciális) erőktől mentes koordináta-rendszereket - ahol minden fizikai törvény a maga természetes alakjában mutatkozik meg (dolgunkat nem nehezítik járulékos erők) - inerciális vonatkoztatási rendszereknek nevezzük. Inerciarendszer végtelen sok van, s egyikről a másikra áttérni a (3) transzformációkkal lehet.

([1] *I. M. JAGLOM*: Galilei relativitási elve, egy nemeuklideszi geometria 47.-51. o. Budapest, Gondolat 1985.)

A XIX.sz. kísérletei közül különös jelentőséggel bír a *MICHELSON-MORLEY* féle interferometriás kísérlet, mert pontosabb és érzékenyebb volt mindegyiknél. (A számítások alapján várt effektus: az interferenciacsíkok eltolódása, a Föld sebességének 1%-át is kimutatta volna.)

A fennálló elméleti ellentmondásokon túl éppen a kísérlet nagy pontossága volt az, ami miatt mindenképpen magyarázatot kellett rá adni. A véglegesnek tekintett magyarázatot Lorentz, Poincare után Einstein adta meg a relativitás elmélet megalkotásával.

Ismeretes azonban, Einsteint nem annyira a fizika kísérleti tényeinek kényszerítő ereje készítette a relativitáselmélet megalkotására, számára inkább természet-filozófiai megfontolások voltak fontosak és döntő jelentőségűek.

1.2. KÖVETKEZMÉNYEK

A speciális relativitás elmélete ma általánosan elfogadott, de :

1. A speciális relativitás elmélete megszünteti az abszolút, a nyugvó, a kitüntetett koordináta-rendszert és a középpontba egy transzformációs formulát állít. Mégis az abszolút bázis ismét felbukkan, mivel koordináta-rendszer helyett másik abszolút mennyiség jelenik meg a fénysebesség. Ez kétséges teszi az abszolút vonatkoztatással, a relativitás döntő jelentőségének előnyeit kiemelő érvelést.
2. A fénysebesség azonban nem csak abszolút, hanem maximális is, azaz a félynél nagyobb sebesség nem létezik. „A félynél nagyobb sebesség esetében fejtegetéseink értelmetlenné válnak; a következőkből egyébként is kitűnik majd, hogy elméletünkben a fénysebesség fizikailag a végtelen nagy sebesség szerepét játsza.” ([2] Einstein: Válogatott tanulmányok 69.o.Gondolat, Budapest,1971.) Ez a feltételezés semmilyen kísérleti tényen nem alapszik. (Bár az is igaz, hogy ezzel ellentétes kísérleti mérési eredmény még nem ismert.) Nem szabad elfelejteni, hogy jelenleg a leggyorsabb érzékelést az elektromágnesesség biztosítja, ami a nála gyorsabb jelenségeket eleve nem képes detektálni.
3. A speciális relativitás elméletében -Einstein tárgyalás – módja szerint – minden mért paraméter azonos a folyamatot jellemző komplex vektor abszolút értékével. (Ugyanakkor komplex jelenségeknél az érzékelhető részt főként az elektromágneses jelenségeknél, a komplex vektor valós része írja le.)

4. A relativitás elméletében nagyon fontos szerepe van Lorentz- transzformációnak. Valójában az elmélet ezen transzformáció általánosítása a jelenségek széles körére. Elsősorban az idő és tér változók egybekapcsolása, a fénysebesség segítségével. A Lorentz-transzformációról a speciális relativitás elmélete kimondja, hogy a mozgásegyenleteknek invariánsoknak kell lenni ezen transzformációval szemben. Azonban a Lorentz - transzformáció részben éppen a MICHELSON-MORLEY kísérlet magyarázata során alakult ki.

A Lorentz - transzformáció általános elfogadása a MICHELSON-MORLEY kísérlet egyik legfontosabb következménye. Azért vált elfogadottá, mert a másodrendű kísérlet eredményének magyarázata másképp nem is volt lehetséges.

1.3. KÖVETKEZTETÉSEK

Mindezek alapján kiemelkedő fontosságú, hogy a MICHELSON-MORLEY kísérlet kivitelezése és az eredmény értékelése mai tudásunk segítségével is bizonyítást nyerjen. Ugyanakkor kívánatos, hogy újra megpróbáljuk más módon is magyarázni az eredményt és ha van ilyen másféle magyarázat, meg kell vizsgálni annak következményeit is. Ennek fontosságát az is bizonyítja, hogy a kísérletet azóta többször is megisméltették más – más technikai kivittel, de 90%-ban változatlan eredménnyel. A vizsgálódásnak nyilvánvalóan ki kell terjedni a fizika és a matematika legújabb eredményeire és fel kell használni mindazt ami ebből a téma szempontjából fontos és lényeges.

Befejezésül fontos megemlíteni a következőket: az *Einstein*-i felfogás a négydimenziós komplex eseményvektorok abszolút értékét kívánja változatlanul tartani, (eltérő állandó sebességű) koordináta-rendszerek közti transzformáció során.

Azonban a négydimenziós komplex jelenségek komplex értékét sosem tudjuk mérni. Mérni csak a komplex vektorok négyzetének valós részét tudjuk. Ez a valós rész már nem lehet állandó a transzformáció során. Ugyanakkor tudni kell, hogy az *Einstein*-i „ívelemnégyszet” típusú megmaradó mennyiségek megfelelnek a négydimenziós *Euklidesz*-i tér négyzetvektorai valós részének, azaz az úgynevezett invariancia úgy is felfogható mint a négydimenziós *Euklidesz*-i terekben mérhető-valós mennyiségek megmaradásának elve. A tény azért is érdekes mert:

1. Einstein a fogalmakat mérhetőségükkel azonosította.
2. Rávilágít a speciális relativitás elmélet sikereinek valódi okára.

Különös képet nyújt mindezzel kapcsolatban az alábbi felsorolás:

1. A Planck tartományban $\leq 10^{-34}$ m és az az alatti méreteknél nem tudjuk, milyen geometria érvényesül.
2. Az elemi részek alatti méreteknél $\leq 10^{-15}$ m sokdimenziós, néhány „működő” dimenziójú terek lépnek az előtérbe.
3. A molekuláris és szubmolekuláris terekben az **EUKLIDESZ-i geometria** érvényesül, míg az ilyen méretek és rendkívül nagyszámú szereplő esetében a **tört dimenziós fraktálgeometria** kerül az előtérbe ami az antropikus méret-tartományban is jelen van.

4. Antropikus méretekben az **EUKLIDESZ-i geometria** használatos ~ 10 millió km térbeli méretig. (gravitációs térben.)
5. Antropikus méretekben és sebességtartományban a **GALILEI-i geometria** használatos az állandó sebességű mozgások vizsgálatánál (gravitáció mentes térben).
6. Az úgynevezett relativisztikus (fénysebességhez közeli) antropikus méretekben a **MINKOWSKI-i geometria** használatos valamint a ~ 10 millió km feletti térbeli méretek esetén.
7. A Naprendszer méreteinél, tömegénél, fénysebességnél a **RIEMANN geometria** érvényesül.
8. Az extragalaktikus és Univerzum méreteknél az **EUKLIDESZ-i geometria** érvényessége került előtérbe (a vonzó sötét anyag és a taszító sötét energia fontos szerepével).

Ez a felsorolás csak nagyon töredékesen igaz, de az egyedi osztályozás olyan képet mutat mintha a geometria stukturái, bár a fenti geometriák határesetekben egymásba olvadnak, nem a jelenségek oka, sokkal inkább a megismerés hajlékony eszköze.

2. fejezet

Kétségek

2.1. ELLENKEZÉS

Einstein speciális relativitás elmélete sikeresnek bizonyult. A felmerült probléma szemlélete és megoldása zseniálisan egyszerű. Általánosan érthető módon épül fel. Az elmélettel egyszerűen nem lehet ellenkezni, mert félelmetes sorrendben követik egymást az érvek és helyességükhöz még csak kétség sem férhet. Minden nagyon egyszerű, világos és érthető bár szokatlan.

A végkövetkeztetések meglepőek és korántsem természeteseek. Az egész nem más mint: a lassuló, gyorsuló idő, a változó hosszúságok és változó tömegek összehangolása a talapzatul szolgáló maximális sebességgel: a fénysebességgel. Mindez zavaró és szokatlan összképet nyújt. A nagy sebességek világa furcsa világ, amelyben mi emberek be vagyunk zárva örökre: a fény börtönébe.

Ez a börtön már igen nehezen érthető meg és még nehezebben fogadható el. Az emberi elme nem tűr semmiféle korlátozást. A korlátok arra ingerlik, hogy ugorja át vagy törje szét őket. (Mikor melyik lehetséges.)

Einstein elmélete pontosan ilyen korlát. Sokan megpróbálták eltávolítani. A kezdeti próbálkozások nem sikerültek és ez megerősítette az elméletet. A lefolytatott kísérletek mérési eredmények igazolták a formulákat. Vagyis: el kell hinni, és el is kell fogadni. Csak egyetlen lehetőség marad: hátha csak részzigazság, hátha a hibátlannak tűnő logikai konstrukció hibákat takar. Talán megfosztható abszolút jellegétől? Eddig mindig így volt, ezután is így kell lennie.

A speciális relativitás elmélet két alapja a fénysebesség állandósága és a Lorentz transzformáció. Amint az majd bebizonyosodik mindkettő egyetlen matematikai definíció következménye: a vektorok skalárszorzatáé.

A skalárszorzat ezen definíciója tudjuk jól nem természeti törvény. Csupán: „...alkalmas a valóságban előforduló összefüggések leírására.” ([3] Jánossy-Tasnádi: Vektor és Tenzor-Algebra, 21.o. Budapest, Tankönyvkiadó, 1980.) Mint azt látni fogjuk, más egyenértékű definíció kellene, ami korlátozástól mentes végeredményt ad.

2.2. AZ AXIOMATIKUS MEGALAPOZÁSRÓL

A természet megismerésének a világban való eligazodásnak legfontosabb eszköze a fogalomalkotás. Valójában egész tudásunk és megismerésünk azon alapszik, hogy a bennünket körülvevő világban megkeressük az állandó jelenségeket, elnevezzük őket, majd ezen állandó jelenségek egymáshoz való viszonyát vizsgáljuk.

1. Ez a viszony általánosságban véve kétféle lehet: két állandó jelenség kapcsolata után is megtartja a fogalmi osztályának tulajdonságait vagy elveszti eredeti jellemzőit és más fogalmi osztályba kerül át. Fontos, hogy minnél kevesebb jellemzőt veszünk figyelembe a fogalom megalkotásához, annál többféle jelenséget fog össze egy csoportba az adott fogalmi osztály.
2. Általában lényeges, hogy a fogalmi osztály jellemző tulajdonságai valamilyen szempontból megmaradók legyenek és ezek állandóságukkal elősegítik a felismerésüket, s így a különböző kölcsönhatások során át biztosítják nyomon követhetőségüket. Azt mondhatjuk tehát, hogy a jelenségeket megmaradó tulajdonságaik alapján a természet egészéből kiszakítjuk és mint „rész” nevezzük el. Ugyanakkor, ha állandó tulajdonságaik a kölcsönhatásokban nem változnak meg, ezen tulajdonságokat mintegy „kiküszöbölhetjük” csak azokat vizsgáljuk, amelyek változásokat szenvednek és alapvetően ez biztosítja számukra a természet titkaiba történő mind mélyebb behatolást.
3. A legáltalánosabb fogalmak egy-egy fontos tulajdonságra vonatkoznak, s ilyen módon a jelenségek igen széles osztályát foglalják magukban. Ezen törvények a fizikában: az ugynevezett megmaradási törvények. Általános törekvés mindmáig az, hogy az érvényesség körét maximálisan, (lehetőleg a végtelenig) tágítsuk.

Összefoglalva tehát: anyagi világ jelenségeit észlelt tulajdonságai alapján az egyes jelenségeket fogalmi osztályokba soroljuk, ezen fogalmi osztályok alapja az, hogy valamely szignifikáns tulajdonság a dinamikai jelenségek viszonylag széles körében állandó, azaz megmaradó tulajdonság, miközben mozgások-változások során, a vizsgált anyagi jelenség kapcsolatok sorozatán megy át.

1. Nyilvánvaló, hogy minden tulajdonság, amely a gondolkodás és a közmegegyezés révén fogalommal lényegül, természetszerűleg eredeti tapasztalások sorozatából képződik: a jellemző részről sorozatosan leválasztva a kevésbé jellemzőeket, végül is csak a szignifikáns „lényeg” marad.
2. Fontos, hogy a „lényeg” soha nem jelenik meg a jelenségekben magányosan, hanem a környező világgal való elszakíthatatlan kapcsolat következtében végtelen sok „kevésbé fontos” jellemző mellett.
3. Természetes, hogy minden egyes jellemző súlya minden jelenségben más és más.
4. Mivel jobbat nem tudunk: a világ térben, időben és strukturálisan végtelen, így semmilyen lokális jellemzőtől nem várható el, hogy érvényessége és használhatósága minden határon túl megfelelő legyen. Többnyire azt tapasztaljuk, hogy növelve a vizsgálódás finomságát a jellemző értékelhetősége-hasznossága rohamosan csökken.

Az eddigiekből triviálisan következik, hogy a végtelen anyagi világban csak korlátozott törvények állíthatók fel, univerzális törvények felállítására, (amelyek mindenütt érvényesek) nem lehetséges. Az univerzális törvények létét gátolja, hogy az anyagi világ homogenitása – végtelensége miatt mindössze hipotézis – bizonytalan, s így természeti törvény alapjává nem tehető. Minden törvény valamely

konkrét helyen, időben és strukturában fogalmazódik meg, véges számú tapasztalat és kísérlet birtokában, ezért a végtelenbe való kiterjesztése mindig csak extrapoláció. Persze axiomatikus rendszer felépítésénél használata lehetséges, de minden olyan következtetést, amely használja az extrapolációt szükségképpen kísérleti ellenőrzésre szoruló hipotézis, amelynek teljes vizsgálata és igazolása a többszörösen végtelen világra soha nem végezhető el, még asszimptotikusan sem.

Tehát semmiféle olyan törvény nem létezhet, amely az anyagi világ végtelenségére igaz. Alapvetően helytelen az az elméleti követelmény, amely ilyen törvények megalkotását igényli. Követelmény csak az lehet, hogy a törvények a lehető legnagyobb mértékben igazodjanak, vagy lehetőleg könnyen igazíthatók legyenek az idő, tér és struktúra objektív végtelenségéhez, s segítségükkel történő jóslások pontossága a gyakorlat számára elfogadható legyen.

Az eddigiek alapján az a hipotézis kockáztatható meg, hogy a tudomány zárt, axiomatikus felépítésének követelménye helytelen, és csupán esztétikai kategória.

Nyilvánvaló, minden elméletnél a kiindulásul választott axiómák mindazt tartalmazzák, amelyek az adott jelenségcsoportra igazak. (Ugyanis a dedukció ismert törvényei útján mindazon részletek származtathatók, amelyek gyakorlatilag haszonnal bírnak, elméletileg újat adnak, ezek természetesen lehetnek rendkívüli jelentőségűek, de nem növelik tudásunkat, csupán tudatossá, osztályozhatóvá és felhasználhatóvá teszik az ismereteket. S így új jelenségek felmerülése esetén ismert axiómák alapján csak arra kaphatunk magyarázatot, amelyek tudtunkon kívül eleve benne foglaltatnak az axiómákban. Egyidejűleg a többi ismeretlen jelenségről pedig félrevezető, hamis képet alkotunk, így végül is az axioma-rendszer feladására, vagy kibővítésére kényszerülünk.

Ez azt is maga után vonja, hogy kiindulva egy axioma-rendszerből, mely az adott jelenségcsoport információ-tartalmának maximális rendezettségét jelenti, (minimális esetleg zérus entrópiát tartalmaz) az axiómák feldolgozása során egyre növekvő számban következnek a tételek és bizonyítások, amelyek csökkenő mértékben támaszkodnak az eredeti axiómákra, azoktól rohamosan távolodva, a kiinduló tételekből segédtételeket vonnak be.

Mindezzel az eredeti áttekinthetőségét és rendezettségét elrontva (rohamosan növelve az entrópiát) végül is az áttekinthetőség és érthetőség rohamos csökkenése következtében a teljes káoszba fulladnak. Ez tekintettel az axiomatikus rendszer zárt voltára:

- Az információs „hőhalál” jelenséget jelenti, melyet csak új objektív, a zárt rendszert bővítő axióma, mint „külső energiaforrás” javíthatja ki. Egyszerűsítve a megalapozatlan részletismeretek tömegét, a rendszer zártságának mértékét csökkentve, új részlet ismeretek felismerésének lehetőségét teremti meg.
- Éppen ezért a tudomány axiomatikus megalapozottságát, mint abszolút követelményt el kell vetni, és a továbbiakban olyan eszközként kell kezelni, amelynek fő feladata az ismert elkülönítése az ismeretlentől.

- Éppen ezért soha nem lehet a tudományos tevékenység feladata magyarázat-ként, a tények néhány világegyenletre való szűkítése, hanem a bővítés az ismeretlen jelenségek minimális nehézségekkel történő adaptálásának irányába.

Ismert, hogy az axiómák valójában nem mások, mint az emberiség ismereteiből konvencionálisan kiragadott magyarázat nélküli részek, nincs semmiféle ok arra, hogy ezen axiómákhoz, akkor is ragaszkodjunk, ha segítségükkel a nem konvencionális jelenségek túlságosan bonyolultan magyarázhatók.

- Valószínű, hogy egy axiómarendszer akkor válik alkalmatlanná a további használatra, ha a belőle levonható következtetések bonyolultságának szintje eléri azt a mértéket, amely meghaladja a tudományos közvélemény megértésének szintjét. (Mindazok a tudományos eredmények, amelyek csak szűk csoport belső ismereteinek és egyezményes terminológiájának felelnek meg és kizárják az általános megértést.) Ha az előbbi jelenség a tudományos terület egészére áttérjed, az axiómarendszer lehetőségei kimerülnek és a teljes megújulás szükségessége merül fel.
- A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy az axiómarendszerek szemléletének és felhasználásának ezen módja az említett nehézségeket feloldja, és lehetővé teszi a tudomány fejlődésének lényegesebb és gyorsabb módját, ez már csak azért is szükségszerű, mert az axiómatikus megalapozottság követelményének több-ezeréves multja ismereteink jelenlegi szintjén már nem képviselik azt a részlet-információs többletet, amit gondolkodás történelmének kezdetén a geometriai gondolkodás zseniális görög megalapozói képesek voltak általános fogalmaik megalkotásával örökül hagyni.

A speciális relativitás axiómatikus elmélet, két posztulátumra támaszkodik a **fénysebesség határsebesség**-ként történő posztulálása, valamint a **fizikai törvények formális matematikai azonosságának posztulátuma minden inercia-rendszerben.** (**Lorentz transzformáció**). De az elmélet széleskörű alkalmazásának nagy akadályai voltak, ezért kiegészült az indefinit vonalelem-ívelemnégyzet követelménnyel, ami maga után vonta a Minkowski geometria és tenzoralkgebra megszületését. Az így kialakult elmélet viszont beleütközött a gravitáció jelenségebe.

3. fejezet

Speciális relativitás

3.1. AZ ELEKTROMÁGNESES HULLÁM

Az elektromágneses jelenségek a fizika egészébe történő beillesztésének problémája sok fizikustól származtatható, de legszorosabban *Maxwell* nevéhez fűződik. *Maxwell* a XIX. század elején megalkotta az elektromágneses jelenségek összefoglaló elméletét és ezzel megszületett a fénysebesség paradoxon.

Maxwell nevezetes heurisztikus egyenleteit, a korábbi kísérletes alapon megállapított törvények általánosítása révén alkotta meg. A matematika vektorterekre vonatkozó eredményeit: a rot, grad, és div (végtelen kicsiny térrészekre vonatkozó) elméleti fogalmait alkalmazta a makróméretű indukció, gerjesztési és egyéb törvényekre. Ebből az következik, hogy az elmélet alkalmazhatósága a kis méretekre hipotetikus.

A továbblépést az jelentette, hogy *Maxwell* egyenleteit a szabad térre alkalmazták, és így származtatták az elektromágneses hullámegyenletet. A hullámegyenlet legegyszerűbb formája az egydimenziós hullámegyenlet (x irányban terjedő hullám), amely egy elméleti konstrukciót, a síkhullámot írja le:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega_0 - k_0 x)} \quad (3.1)$$

A megfelelő peremfeltételek mellett megoldott differenciálegyenlet hullám megoldást ad, melyből az okság figyelembevételével a retardált komplex hullám lett általánosan elfogadott. Ez a nevezetes formula, amely a további nehézségek és a speciális relativitáselmélet megszületésének egyik elindítója lett.

Kiderült ugyanis, hogy két eltérő, de állandó sebességű koordináta rendszerben a fény sebessége nem azonos, ha a szokásos Galilei-transzformációt alkalmazzák.

Mik ennek a hullámnak a fontosabb jellemzői:

1. Sebessége nem invariáns a Galilei transzformációval szemben.
2. Sebessége invariáns a Lorentz transzformációval szemben.
3. Konzervatív, azaz nem veszít energiát
4. Az üres térben párhuzamosan terjed, azaz nem széttartó.
5. Haladó hullám, azaz energiát szállít.
6. Nem diszperzív.

7. De nem vizsgálta senki, hogy ez az elvi fénysugár létezik-e, vagy létezik-e hozzá hasonló tulajdonságokkal rendelkező valós fénysugár. (Például: a nevezetes interferometrikus kísérletekben használt koherens sugárra nem teljesül az energiamegmaradás törvénye.)*

Sajátos módon mind *Maxwell*, mind *Einstein* a fénnel kapcsolatban ugyanarra a paradoxonra jut: amely röviden így szól: ha a fénysugárral együtt tudnánk mozogni, akkor a mozgás folyamán mindig ugyanazon jelenség változatlanóságát tapasztalnánk a fénysugárban.

„Ugyanebben az évben (1895-ben) Aarauban merült fel bennem a kérdés – írja Einstein Önéletrajzi vázлатаiban – : ha lehetséges lenne egy fényhullámot fénysebességgel követni, akkor vajon időtől független hullámteret kapnánk? Ez volt az első gyerekes gondolat-kísérlet, amely a speciális relativitáselméletre vonatkozott.” Ezt a vallomást Önéletrajzában így egészíti ki: „Intuitíve eleve világosan láttam, hogy ennek a megfigyelőnek a szempontjából ítélve, minden jelenségnek ugyanazon törvények szerint kell lefolynia, mint a Földhöz viszonyítva nyugvó megfigyelő szempontjából. Hiszen honnan tudná, azaz honnan tudná megállapítani az első megfigyelő, hogy renkívül gyors és egyenletes mozgásban van?”†

[4] Illy József: A speciális relativitáselmélet megszületése. 407 o. Fizikai Szemle 1975.)

„Einstein saját bevallása szerint 16 éves volt, amikor feltette a kérdést, mi történne, ha képes lenne *üldözőbe venni a fénysugarat c sebességgel* (*c* a megállapodás szerint a fény üres térben mért sebességét jelöli). Látni lehetne-e akkor az oszcilláló elektromos és mágneses tér stacionárius eloszlását? Úgy tűnik ilyen dolog nem létezik, sem a tapasztalat sem a Maxwell egyenletek alapján. A fénysugár üldözése csupán egy másik fénysugarat hoz létre.”

([5] John Maddox: Ami a tudományban még felfedezésre vár. 95.oldal, Vince Kiadó Budapest, 2000.) ‡§

Egészen nyilvánvaló, hogy a fénysugár mentén *c*-vel repülő elvi megfigyelő soha semmiféle megfigyelést nem tudna végezni. A következő okok miatt:

1. A megfigyeléshez természetszerűleg valamennyi: nem végtelen rövid idő kell. Ez azt jelentené, hogy a megfigyelő bizonyos ideig ott kell, hogy maradjon a helyén, tehát lemaradna a fénytől, hogy állandóan más-más fázisú pontot figyeljen meg, amelynek eredményeképp a hullámalak-periodicitása egyértelműen azonosítható.

*I. Sz.Vavilov ezzel kapcsolatos megfontolásait és Vajda János ugyancsak idevágó elméleti kifejtését a Michelson–Morley kísérlet bevezetésében ismertetem.(A szerző.)

†Természetesen onnan, hogy hosszan vagy lassan óriási gyorsuláson kell átesnie, mielőtt elérné a fény sebességét és ez a fiziológiai esemény nem zajlana le minden következmény nélkül.(Szerző)

‡Lásd:Albert Einstein in Albert Einstein: Philosophical Scientist, szerk.P.A. Schilpp (Library of Living Philosophers,1949).

§Azt már ebben a felfogásban megemlíteni is talán felesleges, hogy a két fénysugár közt semmiféle csatolás nem lép fel és különösképpen, hová tűnik a fénysugárrá változott megfigyelő tömege?

2. Egy ilyen megfigyelés esetén, mérési folyamatot kell végrehajtani a megfigyelt fénysugáron ami csak olyan módon végezhető el, hogy energiát vonunk el belőle, s így a megfigyelt fázishelyzet már más-más frekvenciájú fényre vonatkozna.
3. Annak, hogy például az érzékeléshez felhasznált elektron elektromágneses energiát nyeljen el – az észleléshez – gyorsulnia-lassulnia kell, ebben az esetben nem teljesül a gondolati feltételezés, azaz a fényvel nem azonos sebességgel repül a megfigyelő.

Összefoglalva mindez azt jelenti, hogy az állandó sebességgel terjedő egyetlen fénycsoporthoz nem tudunk semmiféle információt nyerni, részben mivel nincs is információ tartalma, részben mivel az információ megszerzése csak a terjedő elektromágneses tér tényleges állapotának megzavarásával lehetséges, aminek következtében már hullámcsomaggá válik – aminek van információ tartalma: éppen a megfigyelés – s így a megfigyelés eleve hibás. A folyamatos megfigyelés még kevésbé lehetséges, mivel az a folyamat állandó megzavarással lehetséges csak és ez egy idő után oda vezethet, hogy a zavaró hatás fogja a megfigyelt folyamat lényegét jelenteni. Mindez információelméleti szempontból azt jelenti, hogy a fényt általában, ha időben és térben nem koherens, információ-minimumú sűrűség-függvények, Gauss-eloszlásúak jellemzik.

Mielőtt tovább mennénk, meg kell említeni *Einstein* (elméletének és küzdelmének) másik döntő eredményét: **eltűnt a fény hordozó közege az éter és helyébe lépett az űr, a vákum**, vagy ahogy sokszor írják az üres téridő kontinuum, ennek hihetetlen hatása volt, tudományos is meg társadalmi is.

„Még drámaibb tulajdonságai vannak az üres térnek, a vákumnak. Planck óta nyilvánvaló, hogy az üres teret univerzális sugárzás tölti be, amelynek energiája gyorsan növekszik a hőmérséklet emelkedésével. Az 1930-as évek óta az is világos, hogy a vákumból elektron-pozitron párok keletkezhetnek. Ma úgy hisszük, hogy a vákumban jelen vannak az elmúlt fél évszázadban felfedezett részecskékhez tartozó erőterek – a leptonok (a háromféle elektron, azaz e, μ, τ és a hozzájuk tartozó neutrínók) és a hadronok (a három pár kvark) azokkal az erőterekkel együtt, amelyek összetartják őket: gluonok az erős kölcsönhatásnál és a nehéz bozonok (W^+, W^-, Z^0) a gyenge kölcsönhatásnál. Aztán ott van még a feltételezett Higgs-bozon, amely képes arra, hogy a semmiből anyagot teremtsen. A közönséges üres térnek nevezett vákum tehát távolról sem üres.”

([6] John Maddox: Ami a tudományban még felfedezésre vár.95-96. o. Vince Kiadó, 2000.Budapest.)

Az idézetben felsoroltak azonban, valójában nem teljesen döntőek az „éter” kérdésben, a kozmológiában ugyanis körülbelül a fentiekben felsoroltak; a mindenki által ismert csillagok esetleges bolygóikkal; a nem látható egzotikus képződmények barna törpék; neutron csillagok; kvazárok és fekete lyukak együttesen is csak 1/7-ét teszik ki az Univerzumunk jelenlegi struktúráját kialakító tömegének, a többi tömeget a találón **sötét anyagnak-energiának** nevezett –jelenlegi feltételezések alapján több komponensből álló– valami tölti ki, amiről igazából csak három dolgot tudunk viszonylag megbízhatóan: tömege van, gravitációs hatása van és hogy eléggé biztosak vagyunk a létezésének szükségességében, de még egy dolog biztos: **ebben terjed a fény**. Így fel kell tenni a kérdést van-e „éter” amiben terjed a fény vagy nincs? *Einstein* igazsága az éter trónfosztásában mennyire igazság ?

Egy közbevetett hipotézis: : a sötét anyag-energia léte önmagában is hipotézis, tehát az itt következő gondolatok a hipotézis-hipotézisei. Az általunk ismert Univerzum anyagmentes helyeit a sötét anyag tölti ki (kozmológiai megfontolások szerint), ez csak rendkívül lazán csatolódik az általunk ismert anyaghoz. Joggal feltehető, hogy a benne terjedő fény a gravitációs hatásán keresztül csatolódik hozzá, ami korlátozza a fény információ továbbításának sebességét, azaz az elektromágneses hullámcsomag komponenseinek fázisát: futási idejét. (Futási idő a fázistolás frekvencia szerinti deriváltja.) Az információátvitel úgy függ össze a futási idővel, hogy az információt hordozó hullám-csomag csak akkor megfelelő, ha a futási idő állandó (az egyes frekvenciák egymáshoz viszonyított fázishelyzete nem változik). Az információ átviteli sebessége viszont a frekvencia tartomány szélességétől függ, viszont minden eddigi fénysebesség mérés keskenysávú fénynyalábokkal történt, ami egyben magyarázza állandóságát, mivel soha nem a fénysebességet, hanem az indikálhatóság miatt mindig fénycsomagok sebességét mérték. Ez úgy függ össze a sötét anyaggal, hogy joggal feltehető nem csupán az Univerzum anyagmentes térségeit, hanem minden anyagmentes teret kitölt, azaz még az barionos anyagot alkotó elemi részecskék közti teret is — ezt bizonyos mértékben cáfolni látszik a Cserenkov effektus—. Ennek egyenes következménye lehet, hogy a fény terjedése során miként az Univerzumban a gravitációs terekben, csatolódik a sötét anyaghoz is gravitációsan ez pedig csupán a fény egyetlen dinamikai jellemzőjén az impulzusán keresztül valószínű. Ez a csatolódás azzal a következménnyel jár, hogy minden egyes — csomagban terjedő — fényhullám komponensei c -nél nagyobb sebességen eltérő mértékben csatolódik a sötét anyaghoz, úgy hogy az információ tudomásunk szerint nem torzul keskeny sávon, mindebből az a követelmény támad, hogy a fény sebességét pontosan nagysebességű modulációval, széles sávon a moduláció torzítása révén lehet csak megmérni és ennek a sebességnek a függetlenségét a koordináta-rendszer sebességétől csupán ez bizonyíthatja.

Azonban ez a sötét anyag még a kvantummechanika atomi elektronpályákra vonatkozó problémáiba is beleszólhat, miért nem sugároz a keringő elektron? Ha a sötét anyag által kitöltött térben mozog, és ha a pálya állandóságát feltételezzük, akkor igenis sugározhat azonban első közelítésben csak egyetlen frekvencián, ami nem visz el információt azaz nem indikálható, ha nagyon keskeny sávon sugároz az még mindig nem indikálható, de gerjeszti a sugárzás impulzusán keresztül a sötét anyagot, aminek állapota a gravitációs kölcsönhatáson keresztül — változik a görbültsége — visszahat az elektronra, így az elektron pályája folyamatosan korrigálódik, pontosan úgy ahogy azt a kvantummechanika bemutatja. Nyilvánvaló ez a korrigáló effektus valamiféle késleltetéssel rendelkezik, ez állandó jellegű késleltetés pedig jól illeszkedik az elektronpályák, diszkrét voltához.

Ennek alapján viszont joggal feltételezhetjük, hogy a sötét anyagnak más megjelenési formája is kell, hogy legyen. Természetesnek lehet tekinteni, hogy a sötét anyag, amelyben jelen van az Univerzum minden gravitációs eseményéből származó gravitációs hullámra szuperponálódva. Másrészt célszerű az anyag szempontjából ideális skaláris térnek tekinteni a sötét anyagot, és ezért az anyag szempontjából struktúrájára nézve a Planck hosszúságúnak tekinteni legnagyobb elemi részét. Ennek következményeként a sötét anyag elemi részei mozgásuk révén gravitációs csatolással gerjeszteni tudják az anyag tömeggel rendelkező elemi részeit és ennek egyik megnyilvánulási formája lehet a zérusponthoz oszcilláció és a $h/2$ -vel jellemzett Heisenberg féle határozatlansági állandó. Persze mindez nem annyira egyszerű, mert a sötét anyag kisebb részben anyag jellegű és gravitációsan vonz, míg nagyobb része energia ami

gravitációsan taszít, persze mindez csak igen kevésbé igazolt hipotézis.

Einstein speciális relativitás elméletének másik lényeges kiinduló gondolata az idő fogalmához kapcsolódik. Ez a problémakör az idő egyértelmű definiálása és az egyidejűség vizsgálata köré koncentrált. A kivezető utat a természetes szinkronizáció fogalmának bevezetésével és a hozzá adott mérési utasítás segítségével alkotta meg, de minden lényeges megállapítását feltételezésként tette meg, így még axiómáknak sem lehet tekinteni ezeket az alapvető definíciókat.

„.....

MOZGÓ TESTEK ELEKTRODINAMIKÁJÁRÓL

I. Az egyidejűség definíciója

Legyen adva egy koordinátarendszer, amelyben a Newton-féle mechanikai egyenletek érvényesek. Ezt a koordinátarendszert a később bevezetendő koordinátarendszerektől való megkülönböztetés, s elképzeléseink pontosítása céljából, „nyugvó rendszernek” nevezzük majd.

Ha egy anyagi pont ehhez a koordinátarendszerhez viszonyítva nyugalomban van, helyzete az utóbbihoz képest merev mérőrudakkal és az euklideszi geometria módszereinek a felhasználásával meghatározható, és derékszögű koordinátákkal kifejezhető.

Ha egy anyagi pont mozgását le akarjuk írni, koordinátáit az idő függvényében adjuk meg. Figyelembe kell azonban venni, hogy ennek a matematikai leírásnak csak akkor van fizikai értelme, ha előzőleg tisztázzuk, mit értünk itt időn. Azt kell szem előtt tartanunk, hogy mindazok az ítéleteink, amelyekben az idő szerepet játszik, mindig egyidejű eseményekre vonatkozó ítéletek. Amikor például azt mondom. „A vonat 7 órakor érkezik”, ez a következőt jelenti: „Az a két esemény, hogy órák kismutatója 7 órát mutat és a vonat megérkezik egyidejű.”

Úgy tűnik, az idő definícióját illetően minden nehézség megszüntethető azzal, hogy az „idő” helyébe az „órák kismutatóját” helyettesítjük. Az ilyen definíció valóban kielégítő abban az esetben, ha arról van szó, hogy kizárólag azon a helyen kell az időt definiálni, ahol az óra éppen van; ez a definíció azonban nem kielégítő akkor, amikor különböző helyeken végbemenő eseménysorozatok időbeli kapcsolatáról van szó, vagy - ez lényegében ugyanezt jelenti - olyan események időbeliségét kell értékelni, amelyek az órától távoli helyeken történik.

Minden esetre úgy is értékelhetnénk az események időpontjait, hogy egy az órával együtt a koordinátarendszer kezdőpontjában tartózkodó megfigyelő az értékelendő eseményekről tanubizonyosságot tevő, a légürestéren át hozzárkező fényjelhez hozzárendeli a megfelelő óramutatóállást. Ez a hozzárendelés azonban azt a nehézséget hozza, magával, hogy nem független az órával ellátott megfigyelő álláspontjától, ahogyan ezt a tapasztalat bizonyítja. Az alábbi fejtegetés alapján sokkal gyakorlatiasabb megállapodásra juthatunk.

Ha a tér egy A pontjában egy óra van, az A pontban tartózkodó megfigyelő az események időpontját az A pont közvetlen környezetében úgy határozhatja meg, hogy megkeresi az ezen eseményekkel egyidejű óramutatóállásokat. Ha a tér B pontjában is van egy óra - tegyük hozzá, hogy pontosan ugyanolyan óra mint az A pontban - az események időpontját a B pont közvetlen környezetében a B pontban tartózkodó megfigyelő szintén értékelheti. További megállapodás hiányában azonban nem lehet az A pontbeli esemény és a B pontbeli esemény időpontját összehasonlítani, eddig csak az A pontbeli időt és a B pontbeli időt definiáltuk, A-ra és B-re egyaránt érvényes közös időt még nem. Az utóbbi időt úgy definiálhatjuk, hogy definíciószerűen megállapodunk abban, hogy az az „idő”, amelyre a fénynek szüksége van ahhoz, hogy az A pontból a B pontba jusson, egyenlő azzal az „idővel”, amelyre szüksége van ahhoz, hogy a B pontból az A pontba jusson. Tegyük fel ugyanis, hogy egy fénysugár az „A pontbeli” t_A időpontban elindul A-ból B felé, onnan a „B pontbeli” t_B időpontban A felé visszaverődik, s az „A pontbeli” t_A időpontban érkezik A-ba vissza. A két óra definíciószerűen szinkronban jár, ha érvényes:

$$t_B - t_A = t_A - t_B$$

Feltesszük, hogy a szinkronizmus e definíciója ellentmondásmentesen lehetséges, mégpedig tetszőlegesen nagy számú pontra, úgyhogy az alábbi összefüggések általánosan érvényesek:

1. Ha a B óra szinkronban jár az A órával, az A óra is szinkronban jár a B órával.

2. Ha az A óra mind a B, mind a C órával szinkronban jár, a B és C órák is szinkronban járnak egymással.

Tehát bizonyos **(elképzel) fizikai tapasztalat alapján megállapodtunk** abban, hogy **mit értünk szinkronban járó, különböző helyeken lévő, nyugalmi állapotú órákon**[¶] s ezáltal nyilvánvalóan megkaptuk az egyidejűség és az idő fogalmának definícióját. Valamely esemény időpontja az esemény helyén található, nyugvó állapotú olyan óra által mutatott idő, amely egy bizonyos nyugvó állapotú órával, mégpedig minden időmeghatározásnál ugyanazzal az órával szinkronban jár.

A tapasztalatnak megfelelően abban is megállapodunk, hogy az alábbi mennyiség :

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

egyetemes állandó (a fény sebessége légüres térben).

Fontos dolog, hogy a időt nyugvó rendszerben nyugvó órák segítségével definiáltuk: az így definiált időt, mivel a nyugvó rendszerhez tartozik, a „nyugvó rendszer idejének” nevezzük.

2. A hosszúságok és időtartamok relativitása

[¶]Kiemelés tőlem: a szerző.

Az alábbi fejtegetések a relativitáselven és a fénysebesség állandóságának elvén alapulnak. A két elvet az alábbiak szerint definiáljuk

1. Azok a törvények, amelyek szerint a fizikai rendszerek állapota változik, függetlenek attól, hogy egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző két koordinátarendszer közül az állapotváltozásokat melyikre vonatkoztatjuk.

2. A nyugvó koordinátarendszerben minden fénysugár meghatározott V sebességgel mozog, függetlenül attól, hogy a fénysugarat nyugvó vagy mozgó test bocsátja-e ki. Erre a sebességre érvényes:

$$\boxed{\text{sebesség} = \frac{\text{a fény által megtett út}}{\text{időtartam}}}$$

ahol az időtartam kifejezés az 1. szakaszban kifejtett definíció szerint értelmezendő.

Legyen adva egy nyugalomban lévő merev rúd, a hosszúsága legyen, szintén nyugvó mérőrúddal mérve, l . Tegyük most képzeletben a rudat a nyugvó koordinátarendszer X -tengelyébe, s mozgassuk egyenletesen (v sebességgel) az X tengely mentén növekvő x irányban. Kérdés, milyen hosszú a *mozgó* rúd, amelynek hosszúságát az alábbi két művelettel meghatározottnak gondoljuk:

a) S megfigyelő az imént említett mérőrúddal a megméréndő hosszúságú rúddal együtt mozog, s a rúd hosszúságát a mérőrúd melléje fektetésével ugyanúgy méri, mintha a megméréndő rúd, a megfigyelő és a mérőrúd nyugalomban volna.

b) A megfigyelő a nyugvó rendszerben felállított, az 1. szakasz szerinti értelemben szinkronban járó, nyugvó állapotú órák segítségével meghatározza, hogy egy meghatározott t időpontban a nyugvó rendszer mely pontjaiban van a megméréndő rúd eleje és vége. Ennek a két pontnak a távolsága, amelyet az előzőleg is használt, a jelen esetben nyugvó mérőrúddal, mérünk meg, szintén olyan mennyiség, amelyet a rúd hosszúságának nevezhetünk.

A relativitáselv szerint az a) művelet alkalmával meghatározott hosszúságnak, amelyet a „rúd mozgó rendszerben való hosszúságának” nevezünk, egyenlőnek kell lennie a nyugvó rúd l hosszúságával.

A b) művelet során meghatározott hosszúságot, amelyet a (mozgó) rúd nyugvó rendszerbeli hosszúságának nevezünk, a két alapelv figyelembevételével meghatározzuk, s kiderül majd, hogy értéke l -től különböző.

Az általánosan használatos kinematikában hallgatólagosan feltételezik, hogy a fenti két művelettel meghatározott hosszúságok egymással pontosan egyenlők, vagy más szóval, hogy egy mozgó merev test a t időpontban geometriai szempontól tökéletesen helyettesítendő egy meghatározott helyzetben *nyugvó ugyanazon* testtel.

Képzeljünk ezenkívül a rúd két végére (A és B) olyan órákat, amelyek a nyugvó rendszer óráival szinkronban járnak, azaz megadják a nyugvó

rendszer idejét azokon a helyeken, ahol éppen vannak, ezek az órák tehát a nyugvó rendszerben szinkronban járnak.

Képzeljük továbbá, hogy minden óra mellett egy vele együtt mozgó megfigyelő tartózkodik s a megfigyelők alkalmazzák a két órára az 1. szakaszban megállapított szinkron járás kritériumát. A t_A időpontban induljon ki egy fénysugár az A pontból, amely a t_B időpontban a B pontból visszaverődik, s a t'_A időpontban visszaér az A pontba. A fénysebesség állandóságának a figyelembevételével felírhatjuk, hogy

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V + v}$$

és

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

ahol r_{AB} a mozgó rúdnak - a nyugvó rendszerben mért - hosszúsága. A mozgó rúddal együtt mozgó megfigyelők tehát nem találják a két órát szinkronban járóknak, viszont a nyugvó rendszerben tartózkodó megfigyelők szinkron járásúnak jelentenék ki őket.

Látható tehát, hogy az egyidejűség fogalmának nem szabad *abszolút* jelentést tulajdonítani, hanem két olyan eseményt, amelyek egy koordináta-rendszerből tekintve egyidejűek, a hozzá viszonyítva mozgó rendszerből nem lehet többé egyidejűnek tekinteni.....”

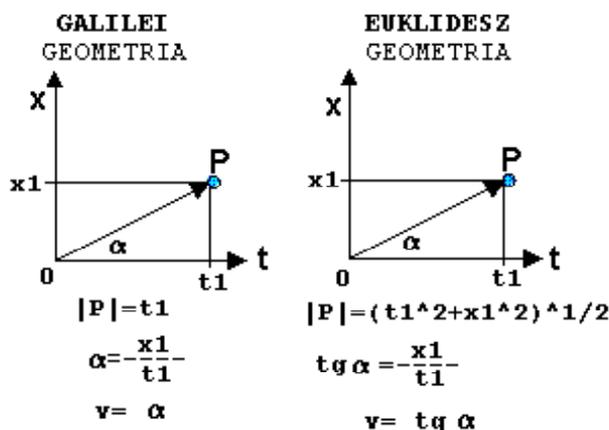
([7] A.Einstein: Válogatott tanulmányok.59-62.o. Budapest, Gondolat, 1971.)

Amint az az idézetből is jól kitűnik *Einstein* feltételezésekkel,elméleti fénysugárral és mérési utasítással alapozza meg a továbbiakat, holott az általa vázolt eljárás a gyakorlatban olyan nehézségeket vet fel, amik megkérdőjelezzik az eljárás elvi alkalmazhatóságát.

Természetesen teljesen felesleges belekeverni a pozitivizmust és az azzal kapcsolatos eszme-futtatásokat. A probléma valójában az, hogy *Einstein* az egyidejűség precíz elvi jelentőségű definícióját megfogalmazva, olyan metodikát írt le, amelyet csak véges pontossággal lehet végrehajtani laboratóriumi körülmények között is. Ez pedig azzal jár, hogy az elmélet kiterjesztése mikró és makró szintre egyaránt csak akkor lehetséges, ha ezt a mérési hibát az elmélet kiterjesztése során folyamatosan figyelembe vesszük, ezt sem maga *Einstein* sem elméletének későbbi követői nem tették meg.

Melyek ezek a fontosabb hibák:

1. *Einstein* feltételezett elvileg tökéletesen egyforma szerkeztű órákat, amelyek természetesen egyformán járnak. Mint már jól ismert igen nagy pontosságú órákat lehet készíteni, azonban ezek pontossága jelenleg még nem felel meg a relativitás elmélet feltételezett méréseiben szükséges **elvi pontosságú** igényeknek.
2. A természetes szinkronizálás eljárásának alkalmazásához a fenti két órát egyformára kell állítani, azonban a véges számábrázolás miatt ez **elvi pontossággal** nem tehető meg. (A végtelen hosszú szám átviteléhez végtelen hosszú idő szükséges.)



1. ábra.

3. A szinkronizálás során egy fényjel fut oda vissza és a két időtartam egyenlősége feltétele az órák helyes beállításának. Ez az eljárás ma már jól ismert és széles körben alkalmazott a lokátortechnikában és ugyanolyan jól ismert az a tény is, hogy a mérés véges pontosságú. (Az impulzus formája, a detektálási küszöb bizonytalansága stb.)
4. További hibalehetőség a két óra helyének elvi pontosságú rögzítése és a köztük lévő távolság elvi pontosságú mérése. Ugyancsak jól ismertek az ezzel kapcsolatos problémák.
5. A döntő hiba azonban az, hogy az idézet elején *Einstein* egyértelműen leszögezi, okfejtése *Euklidesz-i* geometria törvényein alapulnak, míg a „*v*” sebességű mozgó rúd esetében a sebességek kiszámítását *Galilei* geometriájának szabályai szerint végzi (1. ábra), ugyanis fenn akarja tartani a:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V + v} \tag{3.2}$$

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V - v} \tag{3.3}$$

$$t'_A - t_A = \frac{2r_{AB}}{V} \tag{3.4}$$

illetve

$$t_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V} \tag{3.5}$$

3.2-3.5. egyenlőségeket és meghatározásokat.

A fentieket figyelembevéve: megengedhető-e ebben a problémában, ilyen „helyettesítés”?

- A fent körvonalazott 1.-5. következtében az a helyzet áll elő, hogy a nyugvónak tekintett kiinduló KR-ben mérhető adatok csak véges pontossággal lesznek

ismertek és ezért a másik KR-be való átszámításkor (a transzformáció során) a hibát is transzformálni kell. Itt egyébként a szimmetrikus transzformációs formulák ellenére fellép az asszimetria, mivel a két helyről elvileg sem lehet egyforma adatokat mérni egyik vagy másik irányban.

- További lényeges hibát okoz a második KR-beli mozgó rúd sebessége (lásd: 3.;4. és 5.ábrák). Ezt, mivel a priori nem ismert az elsőhöz viszonyítva, ugyancsak meg kell mérni A mérést jelen ismereteink szerint a leghatékonyabban szintén a lokátorelv felhasználásával lehetséges, aminek mérési hibáját (az átszámítás során) ugyancsak figyelembe kellene venni.

„Mielőtt tárgyalni kezdenénk a Galilei-geometria alapfogalmait, hasznos lesz számba venni az (1) transzformációk^{||} alapfogalmait, és az (1) mozgások fontosabb tulajdonságait. Jegyezzük meg: az (1) transzformációk:

egyenest egyenesbe

párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe visznek, valamely egyenes AB és CD szakaszaihoz olyan A'B',C'D' szakaszokat rendelnek, amelyekre $\frac{C'D'}{A'B'} = \frac{CD}{AB}$,

minden F alakzatot vele azonos területű F' alakzatba transzformálnak.

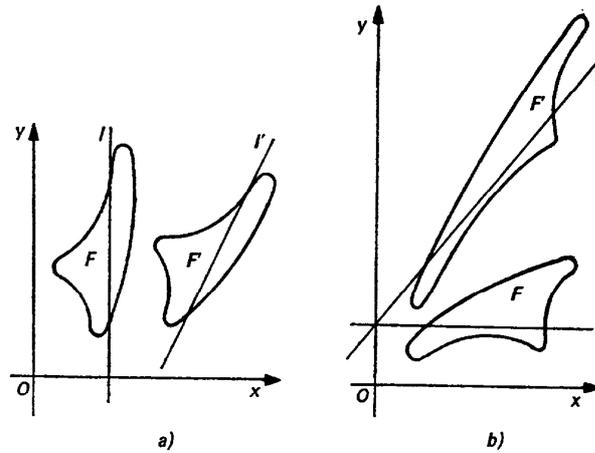
.....Következésképp az *egyenes*, az *egyenesek párhuzamossága*, *egy egyenes szakaszainak aránya*, az *alakzatok területe olyan fogalmak, amelyek nemcsak a megszokott euklideszi geometriában értelmesek hanem a Galilei-geometriában is*. Igen fontos az is, hogy az (1) transzformációk bármely, az *y-tengellyel párhuzamos egyeneshez megint az y-tengellyel párhuzamos egyenest rendelnek* – tehát, bár „az euklideszi geometriában az y-tengellyel párhuzamos egyenes tartalmatlan fogalom (mivel a megszokott értelemben vett mozgások az ilyen egyenest bármilyen egyenesbe átvihetik 2.a ábra), a Galilei-geometriában ezek az egyenesek kitüntetett szerepet játszanak, elütnek más egyenesektől. [Az x-tengellyel párhuzamos egyenesek viszont nem különböznek más közönséges (azaz az x-tengellyel nem párhuzamos) egyenesektől: az 2.b. ábra mutatja, hogy az (2.a.) nyírás az x-tengellyel párhuzamos l egyeneshez vele nem párhuzamos l' egyenest rendel.] *A továbbiakban az „egyenes szót – külön jelző nélkül – az y-tengellyel nem párhuzamos egyenesekre tartjuk fõnn, az y-tengellyel párhuzamos egyeneseket pedig kitüntetett egyeneseknek fogjuk nevezni.*”

([8] I.M. JAGLOM : Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria.68.-69. o., Budapest, Gondolat,1985.)

Mindezt azért szükséges ilyen nyomatékosan hangsúlyozni, mivel *Einstein* számára a mérési módszer segítségével nyert értékek,

^{||}Az (1) transzfomácók:

$$\begin{aligned}x' &= x + a \\y' &= vx + y + b\end{aligned}$$



2. ábra.

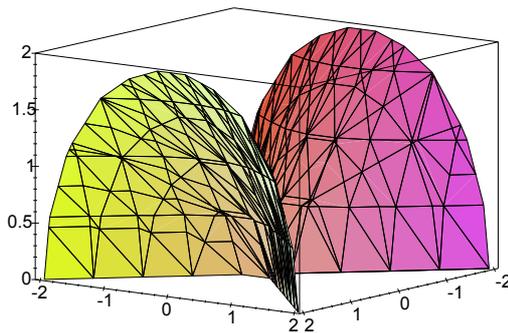
definíciószerűen jelentik a tér és idő mértékét. Minden további elvi számításnak ezek a kiinduló adatai és ezeket makró és mikroméreteken valamint extrém sebességek esetén is, elvi korlátozás nélkül alkalmazhatónak tekinti. Ugyanakkor a hiba jelentős tovaterjedését és bizonytalan növekedését hozza magával, hogy *Einstein* szerint a szinkronizáció eljárása tetszőleges számú további pontra kiterjeszhető.

Itt azonban azt is nyomatékosan hangsúlyozni kell, hogy az eltérő koordináta rendszerekben lévő megfigyelők nem teremtenek új jelenségeket, hanem csupán eltérően regisztrálják az eltérő mérőszámokat.

A gondolatmenet továbbviteléhez (előreugorva) felírható a két transzformációs alapformula és két következményformula:

Az ívelemnégzet formulája:

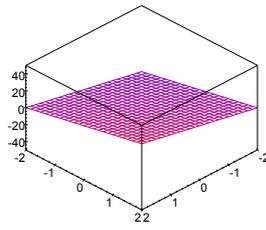
$$ds^2 = dt^2 - dx^2$$



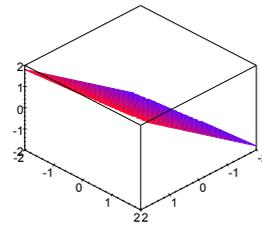
Minkowski féle ívelemnégzet.

A távolság koordináta transzformációja:

$$x_2 = \frac{x_1 + vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

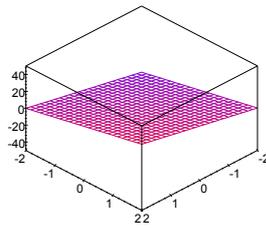


$v=0.99c$

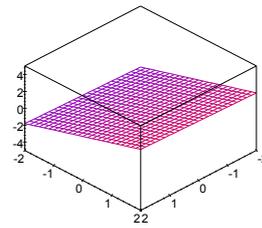


$$t_2 = \frac{t_1 + x_1 v / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Az idő koordináta traszformációja:



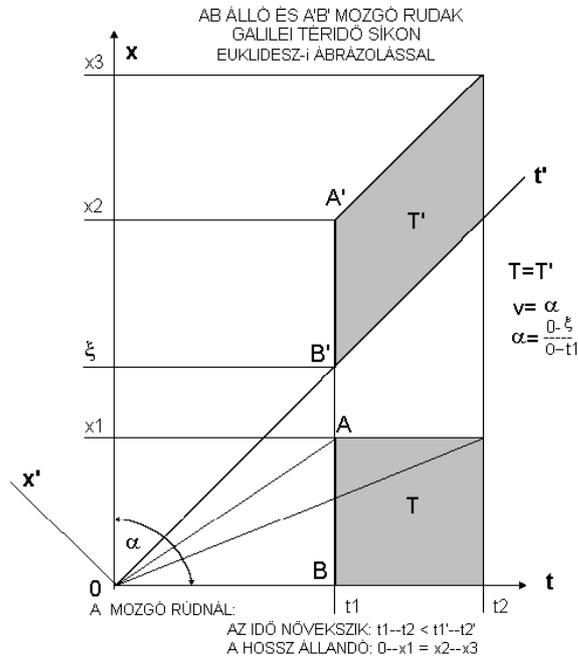
$v=0.99c$



$v=0.1c$

3.1.1. *A mozgó rúd eltérő geometriákban*

Az *Einstei-féle* mozgó rúd segítségével fellépő idő és tér koordináták változásának szemléltetése a 3.;4.; és 5. ábrákon látható az \overline{AB} rúd mindig a sajátrendszerűnek is nevezett nyugvó koordináta rendszerben ábrázoljuk, majd mindhárom esetben azonos szöggel elforgatjuk, ami azonos sebességű mozgó rudat ábrázol a sajátrendszerében az eredeti nyugvó rendszerbe transzformált paraméterekkel.



3. ábra.

A 3. ábrán látható az *Einstein-féle* álló és mozgó rúd, az \overline{AB} nyugvó $x - t$ koordinátarendszerben, míg a mozgó az $x' - t'$ koordinátarendszer v sebességgel halad.

A v sebességet a t és t' tengelyek által bezárt α szög adja meg, melyet a *Galilei rendszerben* a

$$v = \alpha = \frac{\overline{0\xi}}{\overline{0t_1}} \quad (3.6)$$

formulával lehet meghatározni. Ebben a transzformációban a nyugvó rúd hosszát a fény \overline{AB} távolságot befutó idejével is leírhatjuk:

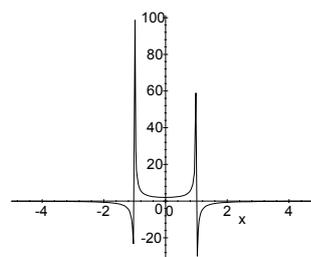
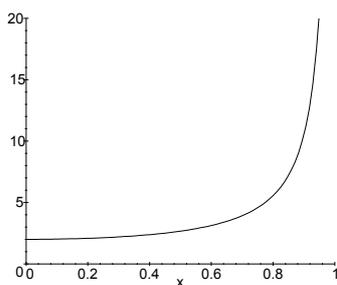
$$\overline{AB} = c(t' - t) \quad (3.7)$$

Az idő a *Galilei geometriában* mozgó rúd esetén *Einstein kifejtése* szerint:

$$\begin{aligned} t_B - t_B &= \frac{r_{AB}}{V_c - v_G} \\ t'_A - t_B &= \frac{r_{AB}}{V_c + v_G} \\ t'_A - t_A &= \frac{2r_{AB}}{V_c}; t_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V_c} \\ \frac{r_{AB}}{V_c + v_G} + \frac{r_{AB}}{V_c - v_G} &\rightarrow \frac{1}{V_c + v_G} + \frac{1}{V_c - v_G} \\ t'_A - t_A &= \frac{1}{V_c + v_G} + \frac{1}{V_c - v_G} \end{aligned} \quad (3.8)$$

ennek ábrázolására legyen a fénysebesség $V_c \equiv 1$, és $v_G = x$ valamint $t'_A - t_A = t$

$$\boxed{t = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}} \quad \text{lásd 3.12 formula.}$$



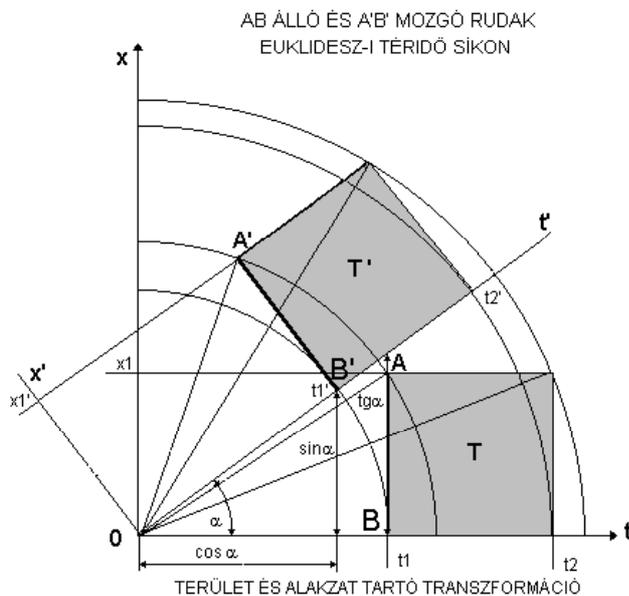
Idő lassulása Galilei geometriában. Idő lassulása Galilei geometriában.

Amint a fenti két ábrán is látható ez a klasszikus *Einstein-féle Galilei időlassulás*.

A 4. ábrán látható az *Einstein-féle* álló és mozgó rúd, az \overline{AB} nyugvó $x - t$ koordinátarendszerben, míg a mozgó az $x' - t'$ koordinátarendszer v sebességgel halad. A v sebességet a t és t' tengelyek által bezárt α szög adja meg, melyet az *Euklidesz rendszerben* a

$$v_E = tg\alpha = \frac{\overline{0x_1}}{\overline{0t_1}} \quad (3.9)$$

formulával lehet meghatározni. Ebben a transzformációban a nyugvó rúd hosszát a ugyanúgy a fény \overline{AB} távolságot befutó idejével írhatjuk le.



4.ábra.

Az *Euklidesz*-koordináta rendszerben a mozgó rúd esetén az idő *Einstein* szerint:

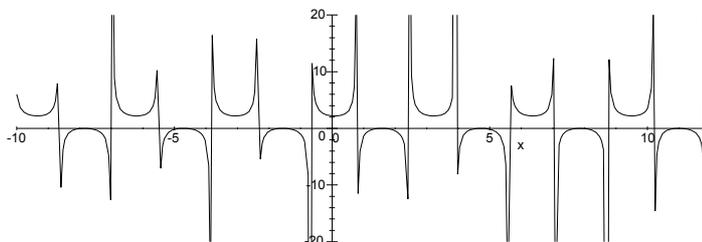
$$t_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V_c - v_E} \tag{3.10}$$

$$t - t_B = \frac{r_{AB}}{V_c - v_E} \tag{3.11}$$

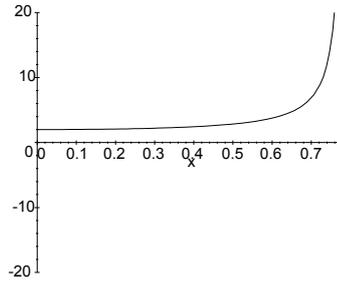
$$t'_A - t_A = \frac{2r_{AB}}{V_c}; t_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V_c}$$

azonban

$$\begin{aligned} (t'_A - t_B) + (t_A - t_B) &= t'_A - t_A \\ \frac{r_{AB}}{V_c + v_E} + \frac{r_{AB}}{V_c - v_E} &\rightarrow \frac{1}{V_c + v_E} + \frac{1}{V_c - v_E} \\ t'_A - t_A &= \frac{1}{V_c + v_E} + \frac{1}{V_c - v_E} \end{aligned} \tag{3.12}$$

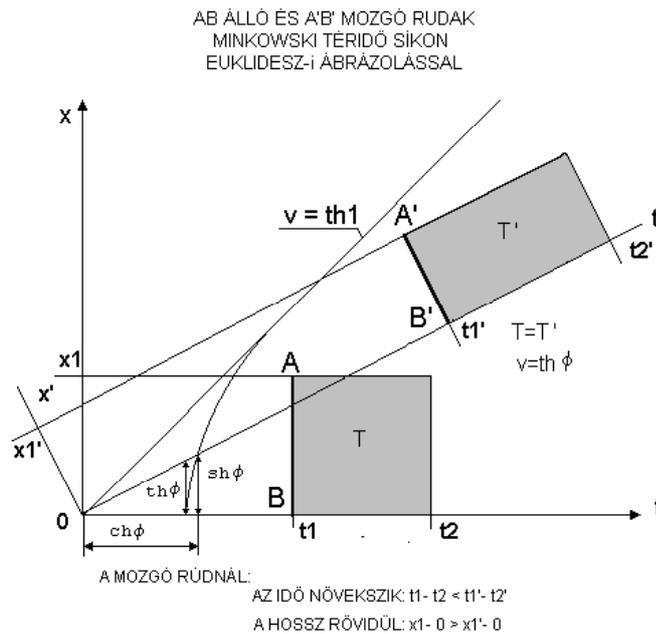


A idő lassulása az Euklides geometriában.



Idő lassulása Euklidesz geometriában.

Amint a fenti két ábrán is látható ez a klasszikus *Einstein-féle* Euklidesz-i időlassulás, nem csupán névleges fénysebességnél, hanem a fénysebesség többszöröseinél is fellép. Ez megengedhetővé teszi azt a feltételezést, hogy a gravitációs terekben, ahol a lassulást változó elliptikus függvények írják le, és viszonylag nagy a gravitációs potenciál gradiense, a lassulás végtelen értéke nem lép fel, mint az Euklidesz-i térben és ezért áttörhető és akár a fénysebesség sokszorososa is elérhető.



5. ábra.

A 5. ábrán látható az *Einstein-féle* álló és mozgó rúd, az \overline{AB} nyugvó $x - t$ koordinátarendszerben, míg a mozgó az $x' - t'$ kordinátarendszer v sebességgel mozog. A v sebességet a t és t' által bezárt α szög adja meg, melyet a *Minkowski rendszerben* a

$$v = \tanh \alpha = \frac{\overline{0x_1}}{\overline{0t_1}} \tag{3.13}$$

formulával lehet meghatározni. Ebben a transzformációban is a nyugvó rúd hosszát ugyanúgy a fény \overline{AB} távolságot befutó idejével írhatjuk le.

A Minkowski-koordináta rendszerben mozgó rúd esetén az idő *Einstein* szerint:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V_c + v_M} \quad (3.14)$$

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V_c - v_M} \quad (3.15)$$

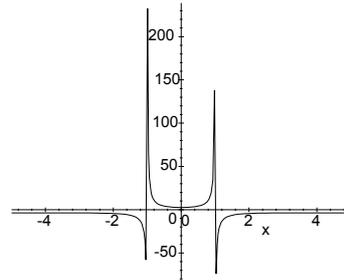
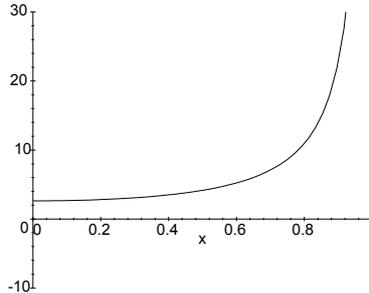
$$t'_A - t_A = \frac{2r_{AB}}{V_c}; t_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V_c}$$

azonban

$$\begin{aligned} (t'_A - t_B) + (t_B - t_A) &= t'_A - t_A \\ \frac{r_{AB}}{V_c + v_M} + \frac{r_{AB}}{V_c - v_M} &\rightarrow \frac{1}{V_c + v_M} + \frac{1}{V_c - v_M} \\ t'_A - t_A &= \frac{1}{V_c + v_M} + \frac{1}{V_c - v_M} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ennek ábrázolására legyen a fénysebesség $V_c \equiv 1$, és $v_M = \tanh x$ valamint $t'_A - t_A = t$

$$t = \frac{1}{\tanh(1) + \tanh(x)} + \frac{1}{\tanh(1) - \tanh(x)} \quad \text{lásd 3.26.formula.}$$



Idő lassulása Minkowski geometriában

Idő lassulása Minkowski geometriában

A Minkowski geometria szerinti és/vagy a speciális relativitás elmélete szerinti időlassulás, amely az egységnyi szöget meghatározó $x = ct$ egyenes mentén két eltérő szerkezetűre vágja a világot.

Összefoglalás: Amint az az ábrákon látható az időlassulás görbéjének menete a három geometriában hasonló, az eltérés a görbék menetének meredekségében és az $x = ct$ egyeneshez tartozó szög: amely a

- Galilei geometriában $\alpha_G = 1$
- Euklideszi geometriában $\alpha_E = 0.78502 \text{ rad} = 45^\circ$
- Minkovszki geometriában $\alpha_M = 1$

a fent meghatározott fénysebességhez tartozó szögek esetében:

- Galilei geometriában : nincs szakadási pont, az időlassulás görbéje a végtelenbe tart
- Euklideszi geometriában : van szakadási pont, az időlassulás görbéje a $\pm\infty$ tart: ha $v = \tan 45^\circ = 1$

- *Minkowski geometriában* : van szakadási pont, az időlassulás görbájének meredeksége végtelen

Két fontos megállapítást vonhatunk le a 3.,4.és 5. ábrák összevetéséből:

1. Mindhárom geometriában az abban érvényes transzformáció, amit a $T=T'$ ' területek egyenlősége mutat, valamint a nyugvó rúd hossza is azonos.
2. Viszont az idő és a távolság nem azonos módon transzformálódik, így a *Galilei* és a *Minkowski* geometriákban a transzformáció nem alakzattartó, míg az *Euklidesz-i geometria* alakzattartó.

Tehát nem engedhető meg a *Galilei*; az *Euklidesz-i* és a *Minkowski* geometria összekeverése és még kevésbé engedhető meg, miként azt *Einstein írja*: „**elképzelt fizikai tapasztalat alapján**” **definíciókat és elméletet alkotni.**

4. fejezet

Lorentz transzformáció → mérések

Az eddigiekben vizsgáltuk az idő és távolság koordináták változását a felsorolt három koordinátarendszerben, azonban a speciális relativitás elmélete további mennyiségek változását is tartalmazza. A nyugvóból a mozgó rendszerbe történő átszámítás, a formulában lévő a különbségképzés, miatt jelentős hibák forrása lehet.

Mozgó koordinátarendszerben a három alapvető mennyiségek megváltozása a nyugalmi-sajátrendszerhez viszonyítva, a speciális relativitás szerint:

A távolság megrövidül:	$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$
Az időtartam megnő:	$T = T_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$
A tömeg megnő:	$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$

A fentiekén túlmenően a leszámaztatott mennyiségek érdekében bevezetett sajátrendszer, egy mozgás nélküli rendszer mivel a nyugalmi vagy sajátrendszerben nincs a fogalomból következően elmozdulás csak térbeli és időbeli kiterjedés. A nyugalmi vagy sajátrendszerben a sajátkoordináta együttmozog az adott tömegponttal vagyis térbeli elmozdulás nincs, tehát a sajátrendszerben minden mozgás befagyott, ennek következtében csak statikus jelenségek léteznek, így például a sajátrendszerben egy atomi rezgés sem létezhet. Ha több tömegpontból állónak tekinthető a test, akkor csak egyikük lehet a sajátrendszer hordozója, a többi hozzáképest mindenképpen mozgó tömegpont – ha más nem a nullponti energia miatt – már nem része a sajátrendszernek, csak transzformálni lehet, az együttes vizsgálat érdekében A saját vagy nyugalmi rendszer gyakorlatilag nem más az einsteini elmélet számára, mint az abszolút tér és idő volt a newtoni rendszerben.

Ha kiegészítjük a kiinduló adatokat a mérési hibákat hordozó tagokkal, akkor a fenti formulák a következőképpen fognak alakulni

A távolság-transzformáció hibafüggvénye:

$$x_2 = \frac{x_1 + vt_1 + \delta x_1 + t_1 \delta v + v \delta t_1 + \delta v \delta t_1}{\sqrt{1 - (v + \delta v)^2/c^2}} \quad (4.1)$$

Az idő transzformáció hibafüggvénye:

$$t_2 = \frac{t_1 + x_1 v/c^2 + \delta t_1 + \delta x_1 v/c^2 + \delta v x_1/c^2 + \delta v \delta x_1}{\sqrt{1 - (v + \delta v)^2/c^2}} \quad (4.2)$$

A mozgó koordináta-rendszerben az alapvető mennyiségek megváltoznak, a mérési hiba itt is jelentkezik:

$$\begin{aligned} \text{A távolság megrövidülése:} & \quad l_0 = (l_0 + \delta l_0)(1 - (v + \delta v)^2/c^2) \\ \text{Az időtartam megnövekedése:} & \quad t_0 = (t_0 + \delta t_0)/\sqrt{1 - (v + \delta v)^2/c^2} \\ \text{A tömeg megnövekedése:} & \quad m = (m_0 + \delta m_0)/\sqrt{1 - (v + \delta v)^2/c^2} \end{aligned}$$

Milyen következtetések vonhatók le a fenti formulákból?

A./Extrém nagy sebességek esetén: a mérési idő és tér koordináta:

Végtelen; változó nagyságú véges és képzetes értéket egyaránt felvehet. Pontosabban fogalmazva a transzformáció a nevezőben kinagyítja a mérési hibákat.

Ennek következtében épp az extrém nagy sebességek esetén elvileg kétséges használhatósága, vagy legalábbis kétséges a számított eredmény, esetleg a valós jelenségek is bizonytalan viselkedésűek.

A hibafüggvények képletei:

A távolság transzformáció: ha $c - v \approx 0$

$$x_2 = \frac{x_1 + vt_1 + \delta x_1 + t_1 \delta v + v \delta t_1 + \delta v \delta t_1}{\sqrt{1 - (v + \delta v)^2/c^2}} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} - (v + \delta v) &= c & x_2 &\approx \infty \\ - (v + \delta v) &\leq c & x_2 &= x_2(1 + A) \text{ ahol } A \text{ határozatlan pozitív szám} \\ - (v + \delta v) &\geq c & x_2 &= ix_2(1 + A) \text{ ahol } A \text{ határozatlan pozitív szám} \end{aligned}$$

Ha az idő transzformáció: $c - v \approx 0$

$$t_2 = \frac{t_1 + x_1 v/c^2 + \delta t_1 + \delta x_1 v/c^2 + \delta v x_1/c^2 + \delta v \delta x_1}{\sqrt{1 - (v + \delta v)^2/c^2}} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} - (v + \delta v) &= c & t_2 &\approx \infty \\ - (v + \delta v) &\leq c & t_2 &= t_2(1 + A) \text{ ahol } A \text{ határozatlan pozitív szám} \\ - (v + \delta v) &\geq c & t_2 &= it_2(1 + A) \text{ ahol } A \text{ határozatlan pozitív szám} \end{aligned}$$

B./Kis távolságok és relatív hosszú idők:

Ezekben az esetekben az a lényeges, hogy a távolságtranszformációs formula számlálója zérussá válhat v negatív előjele esetén ha x, t és v mérési hibájából származó kombinált összeg egyenlővé válik az $x - vt$ kifejezés értékével. Ez annál is inkább könnyen lehetséges, mivel a hiba komplex értéke nem csupán a tényleges mérési hibákat tartalmazza, hanem azoknak a mért értékkel szorzott értékét is.

A térkoordináta H_x hibafüggvény mivel nevezője $\equiv 1$:

$$H_x(t_1, v, \delta x, \delta t, \delta v) = \delta x_1 + t_1 \delta v + v \delta t_1 + \delta v \delta t_1 \quad (4.5)$$

$$\text{ha a névleges } x_2 = -(x_1 - vt_1) \quad \text{akkor} \quad x_2 \approx 0$$

Az időkoordináta H_t hibafüggvény mivel nevezője $\equiv 1$:

$$H_t(x_1, t_1, v, \delta t_1, \delta v) = \delta t_1 + \delta x_1(v/c^2) + x_1(\delta v/c^2) \quad (4.6)$$

$$\text{ha} \quad H_t = -[x_1 - t_1(v/c^2)] \quad t_2 \approx 0$$

A fentiek azt jelentik, hogy mérésekkel a laboratóriumi koordináta rendszerbe transzformált azonosan nem zérus távolságok zérus értékűvé válhatnak, s így singularitásként jelennek meg ismereteinkben. (Mint azt a hibafüggvények is mutatják igen bonyolult sokváltozós kapcsolatok adják meg a zérushosszak struktúráját.)

A leírt jelenségnek érdekes következményei lehetnek az elemi részek vizsgálatakor. Néhány tipikus adat az elemi részek esetén:

A transzformálandó adatok: $x_1; t_1; v$
--

A mérési hibák: $\delta x_1; \delta t_1; \delta v$
--

A v_1 SEBESSÉG NEGATÍV

Adatok neve	$x1_1$	$t1_1$	$v1$	$x2_1$	$t2_1$	$v1$
Adatok értéke	10^{-5}	10^{-8}	-10^3	10^{-8}	10^{-10}	-10^6
Mérési hibák	$\delta x1_1$	$\delta t1_1$	$\delta v1$	$\delta x2_1$	$\delta t2_1$	$\delta v1$
Hibák értékei	10^{-8}	10^{-10}	10^{-6}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-8}
Transz. adatok	$x1_2$	$t1_2$	—	$x2_2$	$t2_2$	—
Számított adatok	$5 \cdot 10^{-8}$	10^{-8}	—	$5 \cdot 10^{-7}$	10^{-10}	—
Transz. hibák	$\delta x1$	$\delta t2_2$	δv	$\delta x2_2$	$\delta t2_2$	$\delta v1$
Számított hibák	$5 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-11}$	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-7}$	10^{-13}	10^8

A v_1 SEBESSÉG POZITÍV

Adatok neve	$x3_1$	$t3_1$	v	$x4_1$	$t4_1$	v
Adatok értéke	10^{-5}	10^{-8}	10^3	10^{-8}	10^{-10}	10^6
Mérési hibák	$\delta x3_1$	$\delta t3_1$	$\delta v1$	$\delta x4_1$	$\delta t4_1$	$\delta v1$
Hibák értékei	10^{-8}	10^{-10}	10^{-6}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-8}
Transz. adatok	$x3_2$	$t3_2$	—	$x4_2$	$t4_2$	—
Számított adatok	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-8}	—	10^{-8}	10^{-10}	—
Transz. hibák	$\delta x3_2$	$\delta t3_2$	—	$\delta x4_2$	$\delta t4_2$	—
Számított hibák	$5 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-11}$	—	$5 \cdot 10^{-7}$	10^{-13}	—

Abban az esetben ha a fenti adatok mérési pontossága a megadott érték, akkor a hiba válik domináns elemmé a transzformáció után. Ez azzal a következménnyel jár, hogy a két koordinátarendszer közti információátvitel már akkor is megszűnik amikor erre még semmiféle egyéb ok sem lenne.

Összefoglalásképp az előzőekben leírt jelenségről a következőket lehet elmondani: A Lorentz-transzformáció képletében mind a számláló mind a nevező esetében kivonással is kapható végeredmény, a mért értékek a mérési eljárások és a mérőműszerek érzékelőinek zajterhelése következtében mérési hibával terhelték. A mért értékek bizonyos többnyire – nemlaboratoriumi tartományaiban – a különbségképzés olyan kis értéket szolgáltat, amely összevethető a mérési hiba nagyságrendjével. Ennek következtében a transzformáció eredménye zajszerűvé illetve extrém nagyságúvá válik.

Tekintettel arra, hogy mérési hiba a mérés elválaszthatatlan része, ezért transzformációval együtt a felsorolt végeredmények törvényszerűen a jelenségek egy csoportját képviselik. Ezen csoport jellemző tulajdonsága az, hogy két egymáshoz képest mozgó rendszer közt elektromágneses hullámok révén kölcsönhatás áll fenn. Ezt a kölcsönhatást a környezet és a belső állapot változásai befolyásolják. A befolyásolás következtében a kölcsönhatás jellemzői nem a formulák által megjósolható módon változnak, hanem zajszerű és extrém értékeket felvevő állapotokat produkálnak. Különleges jelentősége van annak az esetnek amikor sorozatméréseket folytatunk:

ilyen esetekben az eredeti paraméter szórása döntően befolyásolja az ilyen különleges állapotok kialakulását és a műszerek mérési tartományának korlátozottsága következtében a sorozatmérés mérési adatainak jelentős része elveszhet, vagy olyan tévesen értékelt adattá alakul át, ami a jelenség lefolyásának tényleges valószerűségét lényegesen módosítja.

Mindez különösen nagy hibát okozhat az autókorrelációs technikákat alkalmazó mérések esetén, mivel azok a zajszerű mérési eredményeket kiküszöbölik illetve az eredeti jelenségben nem lévő periódikus jelenségekké alakítják át. Ez pedig azzal jár, hogy a mérés során végeredményként olyan periódikus jelenségek tűnhetnek fel, melyek az eredetiben egyáltalán nem voltak jelen. Ennek különös jelentőségét az adja, hogy, amint az ismeretes, az optikában széles körben tárgyalt lencsék Fourier transzformáltját képzik a tárgynak és két Fourier transzformált kép szorzata nem más mint a konvolúciós függvény. Konvolúciós és korrelációs függvény kapcsolata 4.10. A korrelációs függvény a teljesítménysűrűség spektrum Fourier transzformáltja; a teljesítményspektrum az időfüggvényből és az időfüggvény konjugáltjának függvényéből képzett Fourier transzformáltak szorzata.

$$R_{xx}(\tau) = F[g(\omega)]$$

$$\Phi(\omega) = g(\tau) * \bar{g}(t - \tau) = g(\omega) * \bar{g}(\omega)$$

$$F[g(t) * \bar{g}(t)] = g(\omega)\bar{g}(\omega) \quad (4.7)$$

$$R_{xx} = g(t) * g(t + \tau) \quad (4.8)$$

5. fejezet

Speciális relativitás-Geometriák

5.1. GEOMETRIÁK ÉS SZÁMRENDSZEREK

Maxwell korában és később mikor elméletét a legkülönbözőbb jelenségekre alkalmazták a matematika és a geometria egy sor eredménye még nem létezett, illetve csak szűk körben terjedt el ismeretük és alkalmazásuk. Mint jól ismert, a vektoranalízis szabályai szerint a szabad térre alkalmazott *Maxwell* egyenletek hullámegyenletekre vezetnek. A hullámegyenlet megoldása olyan periódikus függvény, melynek kétdimenziós alakja általános formában:

$$E(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (5.1)$$

Ennek az általános megoldásnak többféle függvénye is eleget tesz, ezek közül a legáltalánosabb a komplex hullámot kifejező megoldás:

$$E(x, t) = e^{i\omega t} \times e^{ikx} \quad (5.2)$$

Az általános interpretáció szerint a komplex hullám nem valódi fizikai állapotot ír le. A valós állapotot a komplex hullám valós része jelenti. Az általánosan ismert hullámegyenlet másodfokú parciális differenciálegyenlet, amelynek egyik megoldása a fényhullám síkhullám megoldása *Einstein elméletének* központi eleme, ami jelentős tévedésekhez vezethet, mert a valós fény mindig háromdimenziós hullám, míg a síkhullám sebessége lehet a posztulált „ c_0 ”-nál kisebb is, a háromdimenziós hullámnál ez nem lehetséges.

5.1.1. *Parciális differenciál egyenletek és a fény*

A speciális relativitás elméletének és fogalmainak (ívelemnégyszet, véges fénysebesség, négydimenziós tér) keletkezése szorosan összefügg a másodfokú parciális differenciálegyenletek problémáival és eredményeivel. Ezért célszerű előzetesen felidézni a hiperbolikus és az elliptikus másodfokú parciális differenciálegyenletek fontosabb megálapításait. Egyik legfontosabb eleme:

Az ívelemnégyszet: e fogalomra *Einstein-féle* definíciója negatív értékeket is megenged a két és négydimenziós konfigurációs távolságra azaz indefinit, ami nem áll ellentétben a *Minkowski* geometriával, mert abban a negatív vektorhossz is megengedett.

Viszont a negatív értékek, mint valós mennyiségek négyzetei nem értelmezhetők, a komplex értékek bevezetése nem segített az értelmezési problémán. Ez a probléma azért is jelentős mivel nem csupán a téridő, hanem egy sor további **ívelemnégyzet típusú** mennyiség is létezik például **energia-impulzus ívelemnégyzet**.

A téridő ívelemnégyzet valós-fizikai jelentése úgy állapítható meg, ha feltételezzük, hogy az nem nyugalomban lévő pontszerű testek közti távolság meghatározására szolgál. Ebben az esetben ugyanis a két szomszédos pont közti távolság nem állandó: hanem folyamatosan és véletlenszerűen változik.

Ez a folyamatos és véletlenszerű változás a komplex téridő távolság helyett az átlagos komplex téridő távolság megállapítását teszi csak lehetővé. (Abban az esetben, ha az egyik pontot -origóként- rögzítjük és a másik távolságát mérjük az nem más mint a P pont téridőbeli szóródása a O ponthoz képest. A P ponthoz tartozó **S** vektor többnyire véletlen ingadozással terhelt. Az **S** vektorok sorozatából képezve az eltérések négyzetének átlagát és a szórást nyerjük.)

Így tehát fontos, hogy a fizikai tér különbözik a matematikai-geometriai tértől, mivel az utóbbi egzakttsága következtében minden pont rögzített, a fizikai tér csak mint különféle hatások és jellemzők által állandó változással-mozgással jellemezhető tér létezik.

A legrövidebb téridő útja a merev *Euklidesz geometria* szerinti, a térbeli *Pythagorász tétel* alapján számított út és ez a fény útja is, ha minden külső befolyástól mentes, vagyis a tér inerciarendszerek tere. Ha a valós-fizikai teret vesszük figyelembe ott az árnyékolhatatlan gravitációs tér mindenütt jelen van és a fényre is hat, és ekkor már a fény útja a leghosszabb út: a **geodetikus pálya**.

5.1.2. *Fizikai tér és a matematikai tér*

A fizikai jelenségek leírására kétféle módszert alkalmaznak :

1. Fizikai mérések: a fizikai mérések márcsak jellegüknél fogva is kvantáltak, noha egyaránt vannak analóg és digitális műszerek, azonban a regisztrátumok feldolgozása, már gyakorlatilag digitalizálás illetve a digitális számítástechnika segítségével történik. Mindez azt jelenti, hogy a mérések segítségével érzékelt fizikai tér nem síma mint a matematikai tér, hanem minden pontja alapvetően bizonytalan. Ezt a bizonytalanságot, ha csak kevés szempontból vizsgálom a fizikai-teret el lehet tüntetni a matematikai térrel történő helyettesítéssel. Ilyenkor tudatosan elhanyagolom a valóság többi hatását és geometrizálom a fizikai teret. Ez történik olyakor is, amikor differenciálegyenleteket használok fel az egyébként duális viselkedésű elektromágneses jelenségek leírására.
2. Matematikai feldolgozás: az előző pontban említett módszer alkalmazásával, a mérések révén előálló „fizikai tér” tudatos elhanyagolása a valós fizikai tér tulajdonságai egy részének. A valóság így előálló merev matematikai-geometriai térrel történő helyettesítése a valóság \rightarrow absztrakció irányban nagyon jól működhet. Az ellenkező absztrakció \rightarrow valóság irányban azonban a matematikai-geometriai tér tulajdonságainak a valós fizikai térbe történő vetítése már helytelen következtetésekhez vezethet. Az ilyen geometrizált-merevített terek egyik

alapvető tulajdonsága az, hogy az elhanyagolások okán a legkisebb különbségek nem csökkenhetnek benne minden határon túl, hanem korlátozni kell, mind a legkisebb idő, mind a legkisebb távolság stb. értéket. Ez végső soron azt jelenti, hogy a \mathbf{dx} ; \mathbf{dr} ; \mathbf{dt} ; és más differenciális méretű mennyiségeket nem lehet matematikai értelemben használni. (Ez lehet egyik alapvető oka annak, hogy a gravitációs tér és a kvantummechanikai tér egyesítése nem sikerül. Ismeretes, hogy a kvantummechanikai tér alsó korlátját a *Planck állandó* szabja meg és valószínű, hogy a gravitációs tér energiaszintjei ennél sokkal kisebbek, ez a két jelenség közös elméletbe foglalását mindeddig meggátolta.)

Ennélfogva különféle fizikai terek lehetségesek, amelyeket önállóan lehet matematizálni, de együttesen közös matematikai-geometriai térbe transzformálni csak az összes bizonytalanság figyelembevételével lehetséges.

Ilyenek például:

1. Mechanikus jelenségek tere: inerciarendszerek
2. Gravitációs jelenségek tere: például gyorsítások
3. Elektromágneses jelenségek tere
4. Kvantummechanikai tér

Lényeges természetesen az, hogy minden térhez—téridőhöz hozzárendelhetünk egy matematikai - geometriai teret-téridőt, amely a jelenségek afféle „szinpadaként” szerepel, a jelenségek sok tulajdonságának elhanyagolása következtében a tér—téridő pontossága véges, ismert vagy ismeretlen alsó küszöbvel rendelkezik. Pontosabban a matematikai leírás, a jelenség absztrakt leírása, ahol a jelenség önállóan jelenik meg, megfosztva mind a jelenségcsoport mellékes vagy mellékesnek vélt (figyelembe nem vett) hatásaitól és a többi fizikai jelenség jelenlététől, a vizsgált jelenséget dominánsként kezelve, meghatározott és/vagy ismeretlen nagyságú hibák tudatos vállalásával tárgyaljuk.

Ez a leírási mód azzal jár, hogy a kapcsolt matematikai-geometriai térnek létezik egy alsó pontossági korlátja, amelyet túllépni nem lehet, mivel ezen alsó korlát alatt már a tér egzisztenciája kétséges vagy nem is létezik, netán jelentős módon megváltozik. Mindez azzal a következménnyel jár, hogy a matematikai analízisben megszokott határátmenet, differenciál—integrál fogalma nem érvényes. Helyette, a végtelen sor határértéke helyett - véges sort kell figyelembe venni. Azzal, hogy ilyenkor a számítás hibát tartalmaz, melyet figyelembe kell venni. Az ilyenkor használatos matematikai módszerek a differencia hányados, véges sor határértéke illetve szummája. Például:

A vektoranalízis másodrendű differenciahányadosainál pl: $\text{divrot} \neq 0$, $\text{rotgrad} \neq 0$ kifejezésekben az egyenlőtlenség éppen a hibatagból származik. A megmaradó hibatagból pedig képződik a div illetve a rot aminek közvetlen következménye pl az el nem tűnő tagok megmaradása, azaz nem tisztán elvi jellegű a hullámfüggvény, mert divergenciával illetve rotációval rendelkezik. (Minden parciális derivált helyett, DIFFERENCIA - HÁNYADOS-t, lehet csak használni, ennek egyik alapvető következménye, hogy ilyenkor nem létezik a POTENCIÁLÓS - ÁRAMLÁS, mivel a

differencia hányadosok esetében a maradéktag miatt sem a divergenciája sem a rotációja nem tűnik el.)

5.1.3. *Hullámok és a dimenziószám*

HÁNY DIMENZIÓS A VALÓS VILÁG ?

Mielőtt tovább haladnánk célszerű megvizsgálni, hogy a valóságban bizonyíthatóan milyen hullámok léteznek, különösen azt, hogy a relativitás elméletében (egyszerűsége miatt) különösen kedvelt kétdimenziós hullám (a síkhullám), amelyre a nevezetes *Lorentz-transzformáció* eredetileg vonatkozik, és amely gyakorlatilag minden levezetés és bizonyítás alapja:

„Kezdetiérték feladat hullámeqyenletre

Meghatározandó az az u függvény, amely minden $t \geq 0$ -ra kielégíti az (5.2)* egyenletet és a $t = 0$ időpillanatban az idő szerinti parciális deriváltjával együtt adott értéket vesz fel. Ezt a feladatot nevezzük az (5.2) hullámeqyenletre vonatkozó *kezdetiérték-feladatnak*. Először az egydimenziós esetet tekintjük; u a t időn kívül csak az x térbeli koordináta függvénye. A hullámeqyenletet ekkor

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx} \quad \text{alakú az} \quad (5.2 \equiv 5.14)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (5.15)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad (5.16)$$

kezdeti feltételekkel. Hogy feladatunkat megoldhassuk, először is megjegyezzük, hogy az (5.14) egyenlet legáltalánosabb megoldása:

$$u(x, t) = A(x + ct) + B(x - ct) \quad (5.17)$$

ahol A és B tetszőleges kétszer differenciálható függvények. Helyettesítéssel ui. könnyen igazolható, hogy bármely (5.17) alakú függvény kielégíti az (5.14) egyenletet. Az x és t változók helyébe pedig a $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ új változókat bevezetve, (5.14)-ből következik, hogy $u_{\xi\eta} = 0$, tehát az u függvény $A(\xi) + B(\eta)$ alakú. Hátra van még a kezdeti feltételek kielégítése, vagyis az A és B függvények meghatározása f és g segítségével. Ezt könnyen kiszámíthatjuk, ha az (5.17) kifejezést (5.15)-be és (5.16)-ba behelyettesítjük, az így nyert második egyenletet integráljuk és a kapott egyenleteket $A(x)$ -re és $B(x)$ -re megoldjuk. Az eredmény:

$$A(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi)d\xi + c_0$$

$$B(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi)d\xi - c_0$$

*Természetesen a hivatkozások az eredeti mű hivatkozásai, amelyek a képletek mellett szerepelnek.

ahol c_0 integrációs állandó. A megoldás tehát:

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi) d\xi \quad (5.18)$$

Az (5.18) megoldás az x pontban a t időpillanatban csak a kezdeti értékeknek az $[x-ct, x+ct]$ intervallumban felvett értékétől függ, és egyáltalán nem függ a kezdeti értékeknek az ezen az intervallumon kívül felvett értékétől. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy a hullámegyenlet által leírt jelenség sohasem terjedhet nagyobb sebességgel mint c . Az $[x-ct, x+ct]$ intervallumot az (x, t) értékpárhoz tartozó *függési tartománynak* nevezzük.

.....Az

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$$

kétdimenziós hullámegyenlet megoldása az

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= f(x, y) \\ u_t(x, y, 0) &= g(x, y) \end{aligned}$$

kezdeti feltételekkel:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int \int_{\rho \leq ct} \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(c^2 t^2 - \rho^2)} + \frac{1}{2\pi c} \int \int_{\rho \leq ct} \frac{g(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(c^2 t^2 - \rho^2)} \\ \text{ahol } \rho &\leq ct \text{ és } \rho = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \end{aligned}$$

Az

$$\frac{1}{c^2} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

háromdimenziós hullámegyenlet megoldása az

$$\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= f(x, y, z) \\ u_t(x, y, z, 0) &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

kezdeti feltételekkel:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int \int_{r=ct} f(\xi, \eta, \varsigma) dS \right) + \\ &+ \frac{1}{4\pi c^2 t} \left(\int \int_{r=ct} g(\xi, \eta, \varsigma) dS \right) \end{aligned}$$

ahol $r = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\varsigma - z)^2]^{1/2}$ és dS az (x, y, z) középpontú, ct sugarú $r = ct$ egyenletű gömb felületelemének felszíne a (ξ, η, ς) futó koordinátákban.

A t időpillanatban a tér valamely pontjához tartozó függési tartomány a kétdimenziós esetben a pont körüli ct sugarú *kör belseje és kerülete*, a háromdimenziós esetben pedig a pont körüli ct sugarú gömbnek csak a

felülete. Ennek megfelelően valamely pont befolyási tartománya[†] a két-dimenziós esetben az egyre növekvő körlap által előállított kúp belseje és felülete, a háromdimenziós esetben pedig az egyre növekvő gömbök által előállított négydimenziós kúpnak csak a háromdimenziós felülete. *Fizikailag ez azt jelenti, hogy a kétdimenziós hullámjelenség az egydimenzióshoz hasonlóan maximálisan c sebességgel terjed, de lassabban is terjedhet; a háromdimenziós hullámjelenség azonban mindig **pontosan c sebességgel terjed.***[‡]

Ha egy kezdetiérték feladat esetén az n dimenziós térben minden ponthoz $n-1$ vagy ennél alacsonyabb dimenziós függési tartomány tartozik, akkor azt mondhatjuk, hogy a feladat által meghatározott hullámra érvényes *Huygens* elve. A kétdimenziós hullámra érvényes *Huygens* elve; ennek következménye az, hogy háromdimenziós hullámokkal: fény-, hang-, vagy rádióhullámokkal pontosan meghatározott, „éles,” jeleket tudunk továbbítani. A kétdimenziós egyenlet megoldásaira nem érvényes *Huygens* elve; ezért nem tudunk pontosan meghatározott jeleket továbbítani azáltal, hogy fodrozódásokat idézünk elő a tő kétdimenziós felszínén. Jelek torzításmentes, sikeres továbbítása két dimenzióban tehát lehetetlen.

Régóta kutatják a matematikusok, hogy vajon van-e valamilyen más alakú másodrendű parciális differenciálegyenlet, amelynek megoldásaira érvényes *Huygens elve*. Csak másodrendű egyenleteket érdemes vizsgálni, mivel a magasabbrendű egyenleteknél többszörös törés lép fel, tehát feltétlenül van torzulás. **Bebizonyították, hogy a hullámegyenlet az 5, 7, 9...dimenziós térben rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, az egydimenziós és minden páros dimenziós térben azonban nem.**[§]Nem találtak a hullámegyenlettől lényegesen különböző, *Huygens*-elvet kielégítő megoldású egyenletet. *J. Hadamard* híres sejtése, hogy ilyen egyenlet nem létezik.

Hadamard sejtésén kívül felmerülhet az a kérdés mi különbözteti meg a háromdimenziós világunkat pl. a hét-dimenziós világtól; ebben a jelek terjedését az

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = \sum_{i=1}^7 u_{x_i x_i}$$

hét-dimenziós hullámegyenlet írja le. A háromdimenziós hullámegyenletet a többtől lényegesen megkülönbözteti következő tulajdonsága. Ez az egyetlen egyenlet, amelynek megoldásai tetszőleges alakú, aránylag torzulásmentes gömbhullámok. Gömbhullám a hullámegyenlet

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = h(r)f(r - ct) \quad (5.19)$$

alakú megoldása, ahol

$$r = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

[†]A jelzett pont valamiféle divergenciával rendelkező pont, amely állandóan emittál vagy nyel.

[‡]Kiemelés tőlem. A szerző.

[§]Kiemelés tőlem. A szerző.

Az f függvényt *hullámalaknak*, h -t pedig *csillapítási tényezőnek* nevezzük. Állításunk igazolására az (5.19) kifejezést behelyettesítjük az

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$$

n -dimenziós hullámeqyenletbe. Mivel az f függvény tetszőleges lehet, az így nyert egyenletben f, f', f'' együtthatóinak külön-külön zérussal kell egyenlőnek lenniök. Ezutóbbi egyenletek $n \neq 3$ esetén a h függvényre egymással ellentétes feltételeket jelentenek. Ha azonban $n = 3$, a $h(r) = 1/r$ függvényt helyettesítve, az együtthatókra valóban zérus értéket kapunk. A jelek, mivel ezeket rendszerint központi forrásból sugározzák ki, gömbhullámok. E jelek tehát csak háromdimenziós világban terjednek torzításmentesen.,

([9] Edwin F. Beckenbach: Modern Matematika. 111-114.o. Budapest, Műszaki könyvkiadó, 1960.)

Ebből az idézetből néhány fontos állítást szükséges kiemelni:

1. A kétdimenziós hullámeqyenlet, ami egydimenziós térben írja le a hullámfüggvényt *c sebességgel terjed, de lassabban is terjedhet*, tehát ez egyáltalán nem alkalmas a speciális-relativitás elmélet céljaira, különösen nem alkalmas *Einstein* idő definíciójának korábbiakban idézett mérési módszerére: amelyben definiálatlan „fényugár” segítségével két-térdimenziós rendszerre kiterjesztett mérési módszerrel definiálja az időt. Nyilvánvaló, hogy az egydimenziós fény (a síkhullám) többféle lehetséges sebeségének a *Galilei-geometria invariáns sebeség fogalma* a legmegfelelőbb, éles ellentétben *Einstein* felfogásával. Különösen az a tulajdonság fontos hogy az egydimenziós hullám-síkhullám nem alkalmas semmiféle információ továbbítására így az *Einstein* által leírt mérés végrehajtására sem. Itt újra rá kell mutatni arra tényre, hogy minden leírás, amely a speciális relativitás elméletét ismerteti az egydimenziós síkhullám formuláját használta és használja a hullám leírására:

$$u(x, t) = A(x + ct) + B(x - ct)$$

másrészt arra a tényre, hogy bár *Einstein* az eredeti megfogalmazásban a fényhullám fázissebességére mondta ki az állandó és maximális voltát, a későbbiekben ezt módosították és teljesen egyértelműen a csoportsebességre mondták ki végleges meghatározásként. A fázissebességre pedig elfogadták változó voltát nagyobb is kisebb is lehet mint a csoportsebesség.

2. A két térdimenziós hullámeqyenlet, amely a *Michelson-Morley* kísérlet —és más hasonló kísérletek— alapvető geometriája és kísérlet leírásából ugyancsak azzal a problémával jár, mint az egy térdimenziós hullám, amelyet kétdimenziós terjedés keretei között vizsgálnak, ezt a helyzetet akár az egy térdimenziós akár a kétdimenziós hullám segítségével kivájuk tárgyalni a fényhullám sebessége változó lehet, így a kísérlet eredményét gyakorlatilag megsemmisíti:

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi) d\xi$$

3. A tulajdonképpeni kérdés tehát az, hogy a háromdimenziós hullám, amely alkalmas az információ továbbításra és nem sík hanem gömbhullám, a valóságban végrehajtott kísérletekben, mennyiben felelt meg a gömhullámnak és így a kísérlet valódi céljainak. Az *Einstein-féle* gondolatkísérletet nem érdemes vizsgálni, mivel *Einstein* eleve nem foglalkozott a probléma ezen részével nem is definiálta semmiféle formában, a kérdés így nem is válaszolható meg. A *Lorentz-transzformáció* esetében síkhullám modelt használnak, így az erre épülő számítások helytelenek. Csupán annyiban felel meg a síkhullám-képnek, hogy c határsebesség volta igazolódik, de c változatlan jellege nem igazolható. A *Michelson-Morley* kísérletben eredetileg használt fénysugár a fényforrás helyén statisztikus eloszlású gömhullámsokaság volt, amelyet frekvencia és térfrekvencia szűrővel tettek koherensé. Az így előálló koherens hullámokra, azonban igaz a *Fourier* tétel, amennyiben mennél jobban csökkentjük a sávszélességet, annál hosszabb lesz a hullám futási ideje illetve annál inkább nő a hullám időbeli hossza. Ugyanilyen hatása van a térbeli korlátozásnak, aminek következtében az igen keskeny diafragma hatására jelentősen megnő az egyes hullámok térbeli hossza. Ennek következményei úgy ítélhetők meg, hogy végtelen meredek szűrőt és diafragmát feltételezve végtelen hosszú síkhullámot kapunk eredményül, ami azt jelenti, hogy mennél jobban szűrjük és diafragmázzuk (koherenciahossz növelése érdekében) az eredeti gömhullámot, amely 3+1 dimenziós hullámként kerül ki a sugárforrásból, minél hosszabb távon koherens nyalábot előállítva, annál inkább közelít az 1+1 dimenziós síkhullámhoz. Ez pedig azzal jár, hogy rohamosan csökken az információ átvitel képessége. Információ átvitel csökkenése következtében, azonban az időmérés illetve távolságmérés pontossága csökken illetve lehetetlenné válik.

A legutóbbi idézet nyomán feltehető a kérdés van-e mérési bizonyíték világunk dimenziószámára:

„...Az utóbbi időben több ilyen jellegű összevetést is végeztek. Ezek egyike az elektron úgynevezett anomális mágneses momentumára vonatkozik. Mint ismeretes, az elektronnak van saját perdülete, amit spinnek nevezünk, és ehhez kapcsolódva mágneses tulajdonságokat is mutat. A mágneses momentum és a spin hányadosa elektron esetében igen jó közelítéssel megegyezik töltésének és tömegének hányadosával. Az ettől való eltérést nevezzük anomális mágneses momentumnak, amely az elektron és a körülötte lévő elektromágneses mező kölcsönhatásából származik. Ezt a mennyiséget egyrészt rendkívül pontosan meg lehet mérni, másrészt a kvantumelektrodinamika - óriási mennyiségű numerikus munka árán - a kísérlettel azonos pontossággal, 12 jegyre ki tudja számítani.

A kísérleti és elméleti eredmény 9 jegyre megegyezik egymással, amit a kvantumelektrodinamika helyességének egyik legmeggyőzőbb bizonyítékának szokás tekinteni. A 10-edik jegytől kezdve azonban a két érték között különbség van. Más hipotézisek mellett megpróbálták ezt azzal magyarázni, hogy a téridő nem pontosan négydimenziós. A számítás eredménye ugyanis a mérési hibán belül megegyezik a kísérlettel, ha feltételezzük, hogy a téridő dimenziója 3.9999995. azaz $5 \cdot 10^{-7}$ -kel kisebb, mint 4.

Ez a tény egy további szempontból is figyelemreméltó. A kvantumelektrodinamikai számítások során végtelen mennyiségek is fellépnek, ame-

lyek bizonyos szabályok alapján, más végtelenek levonásával eltüntethetők. E fölött az elvi jellegű probléma fölött szemet szokás hunyni éppen az elmélet megdöbbenően pontos eredményei miatt. Ismeretes azonban, hogy ezek az úgynevezett divergenciaproblémák nem jelentkeznek, ha a téridő dimenziója kicsit kisebb, mint 4. A divergenciák eltüntetésére emiatt a végtelenek levonása helyett azt a technikát alkalmazzák, hogy a számításokat négytől különböző (gyakran komplex!) dimenzióban végzik, majd az eredményben a $d \rightarrow 4$ határátmenetet hajtják végre. Lehetséges, hogy e matematikai trükk mögött fizikai realitás van, hiszen ha $d \rightarrow 4$, akkor a kvantumdinamika elvileg is korrektté válik.

Egy további összehasonlítás és dimenzióbecslés végezhető az úgynevezett Lamb-féle eltolódás alapján. Ez a hidrogénatom két igen közel eső energiaszintjének különbsége, amelyet mind elméletileg, mind kísérletileg igen pontosan meghatároztak. Ha kétféle eredmény kismértékű eltérését dimenziós effektusnak tulajdonítjuk, akkor arra kell következtetnünk, hogy a tér dimenziószáma a háromtól legföljebb $3,6 \cdot 10^{-11}$ -gyel tér el. Ebben a számításban feltételezték, hogy az idő pontosan egydimenziós, továbbá, hogy a D dimenziós térben a két töltés közötti Coulomb-féle erő r^{1-D} -vel arányos.”

([10] G.J. Gorelik: Miért háromdimenziós tér? 210-211. o. Budapest, Gondolat Kiadó 1987.)

5.1.4. *Két és négydimenziós vektorok*

A kétdimenziós hullámmegyenlet megoldásaként két hullámforma ismert :

1. A szinuszos **1** térdimenziós állóhullám:

$$\Phi(x, t) = C \cos(\omega t + \gamma_1) \cos(kx + \gamma_2) \quad (5.3)$$

2. Az **1** térdimenziós pozitív-negatív irányba haladó koszosinuszos hullám:

$$\Phi(x, t) = A \cos(\omega t \mp kx + \gamma) \quad (5.4)$$

Mivel a fentiek egyike sem alkalmas információ továbbításra, a hullámmegyenlet ismert sémájából **3 tér + 1 idő dimenzió** következik, mint alkalmas megoldás:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi; t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t \mp kr + \gamma) \quad (5.5)$$

pontszerű töltés sugárzása.

Viszont a hullámmegyenletnek ez a megoldása csak a komplex számok körében igaz, ahol a képzetes egység $\mathbf{i}^2 = -1$. Az már kevésbé közismert, hogy az *Einstein* által alkalmazott *Minkowski* geometriához a hiperbolikus komplex számok tartoznak és ezek körében a képzetes egységre $\mathbf{i}^2 = 1$ egyenlőség teljesül, hasonló módon, mint a vektoralgebra és vektoranalízis elméletében. Ennek következtében a komplex és hiperbolikus komplex számok a következőképp bonthatók fel:

$$\text{Komplex számok : } e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad (5.6)$$

$$\text{Hiperbolikus komplex számok : } e^{ix} = \operatorname{ch}(x) + i\operatorname{sh}(x) \quad (5.7)$$

**A négydimenziós komplex és a hiperbólikus komplex számok:
ABSZOLÚT ÉRTÉKE.**

A speciális relativitás elméletnek egy alapvető eljárása bevezeti az ívelemnégyzet fogalmát - és a négyesvektorok invarianciáját - amit a következő formában definiál és Minkowski geometria komplex alakjaként mutatja be:

Euklidesz:

$$ds_E = cdt + xi + yj + kz \quad (5.8)$$

$$|ds|_E^2 = c^2 dt^2 - x^2 - y^2 - k^2 \quad (5.9)$$

Minkowski:

$$ds_M = cdt + xi + yj + kz$$

$$|ds|_M^2 = c^2 dt^2 - x^2 - y^2 - k^2$$

A speciális relativitás elmélet egy alapvető posztulátuma bevezeti az ívelemnégyzet fogalmát és egyidejűleg a négyesvektorok invarianciáját, ami *Minkowski* esetében az alábbiak szerint definiálódik:

A négydimenziós *Minkowski* differenciál vektor:

$$ds_M = dx + dy + dz + icdt \quad (5.10)$$

A kétdimenziós *Minkowski* differenciál vektor:

$$ds_M = dx + icdt$$

Négydimenziós *Minkowski* abszolútértéke-ívelemnégyzete:

$$ds_M^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (cdt)^2 \quad (5.11)$$

Kétdimenziós *Minkowski* abszolútértéke-ívelemnégyzet:

$$ds^2 = dx^2 - (cdt)^2 \quad (5.12)$$

Azonban fel kell figyelni arra, hogy a négydimenziós ívelemnégyzet, amelyet a Minkowski geometriából származtatnak, másképp is előállítható, mégpedig a komplex számok-kvaterniók algebrájában:

A kétdimenziós Euklideszi komplex vektor:

$$ds_E = cdt + \mathbf{i}dx$$

A térbeli távolság Euklideszi differenciálvektora:

$$d\mathbf{r}_E = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

A négydimenziós téridő Euklidesz differenciálvektora-kvaterniója:

$$ds_E = cdt + dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (5.13)$$

A kétdimenziós Euklidesz komplex vektor:

$$ds_E = cdt + \mathbf{i}dx$$

ennek alapján Euklidesz komplex négyzetvektor reális része:

$$Re(ds^2) = Re dr^2 + c^2 dt^2$$

amely a Pythagorász tételére támaszkodik:

$$ds^2 = (\text{Im } ds)^2 + c^2 dt^2 \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} Re(ds^2) &= -(ds)^2 + c^2 dt^2 \\ Re(ds^2) &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ Re(ds^2) &= c^2 dt^2 - \text{div}(\mathbf{r}) \\ -Re(ds^2) &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \end{aligned}$$

kétdimenziójú Euklidesz négyzetvektorok reális része:

$$\begin{aligned} Re ds_E^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 \\ Re ds_E^2 &= -Re(dr^2) + c^2 dt^2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

a kétdimenziójú Euklidesz négyzetvektor reális része:

$$Re ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

ahol $Re(ds^2)$ egyértelműen Euklidesz-komplex alak és semmiképp sem nevezhető *Minkowski*-hiperbolikus komplex alaknak. Ami azt is jelenti, hogy az ívelem-négyzet koordináta transzfomációját az *Euklidesz*-komplex alakban kell végrehajtani.

Ebből egyértelműen következik, hogy *Einstein* valódi törekvése a *Minkowski-geometria-hiperbolikus komplex számok* alkalmazásával nem az ívelemnégyzet invarianciája, hanem az ívelem abszolúrtékének invarianciája volt. Azonban a *Lorentz transzformáció* alkalmazása esetében ezt már valóban Minkowski-hiperbolikus komplex alakjában kellett definiálni.

Euklidesz komplex-kvaternió alakban az ívelemnégyzet formulája:

$$ds_E^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + \text{Im } ds^2 \quad (5.16)$$

Minkowski komplex-kvaternió alakban az ívelemnégyszet formulája:

$$ds_M^2 = c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \text{Im } ds^2$$

Minkowski négydimenziós komplex hiperbolikus vektor abszolút értéke:

$$ds_M^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (cdt)^2$$

vagyis az

Euklidesz-i négyzetvektor valós része azonos a Minkowski vektor abszolút értékének négyzetével.

A korábban már leírt komplexhullám megoldás miatt *Einstein* természetesen a komplex számok körében maradva vezeti be a képzetes egységet, azt állítva, hogy ez úgy áll elő, hogy az ívelem a következő:

$$ds_M = ds(dx, dy, dz, \mathbf{i}cdt) \quad (5.17)$$

illetve kétdimenziósan:

$$ds_M = ds(dx, \mathbf{i}cdt) \quad (5.18)$$

komplex vektorból áll. Természetesen a komplex számítások szabályainak ez semmiképp sem felel meg[¶], de ha négydimenzióban gondolkodunk, akkor a kvaterniók szabályainak megfelelően kell felírni az ívelem vektort.

Komplex számok esetében:

$$ds = ds(cdt, \mathbf{i}dx, \mathbf{j}dy, \mathbf{k}dz)$$

$$ds = ds(cdt, \mathbf{i}dx)$$

$$ds = cdt + dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (5.19)$$

$$ds = cdt + \mathbf{i}dx$$

ahol természetesen komplex esetben:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$$

míg hiperbolikus komplex esetében a kifejezések ugyanazok, de:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$$

Ebből közvetlenül adódik az ívelemnégyszet kifejezése az egyik illetve a másik komplex rendszerben:

Komplex kétdimenziós alak:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 + \mathbf{i}(2dxcdt) \quad (5.20)$$

[¶]Az ilyen típusú komplex értékek használatát, csupán a később kidolgozott tenzoralkgebra engedi meg, az ott érvényes szabályok szerint.

Hiperbolikus komplex kétdimenziós alak:

$$ds^2 = (cdt)^2 + dx^2 + \mathbf{i}(2dxcdt) \quad (5.21)$$

Mint az a formulából is látható a komplex alak, amely megfelel az *Euklidesz-i* geometriának és a hiperbólikus komplex amely megfelel a *Minkowski* geometriának az ívelemnégyszetre eltérő formulát ad, ami korántsem egyezik meg az *Einstein féle ívelemnégyszet* kifejezésével. Ez azért is fontos, mivel *Einstein* határozotlan kihasználja a képzetes egység fogalmát az ívelemnégyszet képzésekor, tehát formailag ragaszkodnia kellene az ehhez kapcsolódó szabályokhoz. Formailag azonban az *Einstein-féle* kétdimenziós ívelemnégyszet megegyezik, a komplex kétdimenziós négyszetvektor valós részével.

Ahhoz, hogy tovább lehessen lépni és a felmerült problémát egyértelművé lehessen tenni, célszerű a kétféle komplex szám abszolút értékének négyzetét felírni:

Komplex számok esetében:

$$|ds|^2 = (cdt)^2 - dx^2 \quad (5.22)$$

Hiperbolikus komplex számok esetében:

$$|ds|^2 = (cdt)^2 + dx^2 \quad (5.23)$$

Amint az jól ismert az *Einstein-féle* ívelemnégyszet formulája pedig:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 \quad (5.24)$$

Az eddigi bizonyos mértékig zavaros fejtegetésekből a következő érdekes megállapításokat lehet tenni:

1. *Einstein* az ívelemnégyszet fogalmának bevezetésekor egyértelműen a komplexben használatos képzetes egység $i^2 = -1$ használatát vette alapul.
2. A *Lorentz* transzformáció le és bevezetése következtében az ívelemnégyszet származtatását átvitte a hiperbolikus komplex számok körébe és a továbbiakban elméletében a hiperbolikus komplex számokra és a *Minkowski* geometriára hivatkozott.
3. Mind a komplex számok körében mind a hiperbólikus komplex számok körében az *Einstein-i* kifejezés formálisan megtalálható: komplex rendszerben az ívelemnégyszet reális részét jelenti, míg a hiperbólikus rendszerben az ívelemnégyszet abszolútértékét.
4. *Einstein* egyik alapvető megállapítása, hogy az ívelemnégyszet értéke a fényre-elektromágneses hullámra éppen zérus. Ebből következik, hogy a fényre vonatkozó adatok a komplex síkon a képzetes tengelyen található, míg a hiperbólikus komplex síkon a 45° -os egyenesen.
5. Ha valamilyen konkrét fizikai jelentést szeretnénk tulajdonítani a fenti két kijelentésnek, az igen egyszerű:

- Komplex számok esetében a valós rész zérus, képzetes tengelyen lévő adatokkal jellemzett jelenség a csillapítás nélküli hullámot jelenti. Mint ismert rövid távon, laboratóriumi méretekben a fény üres térben ilyennek tekinthető.^{||}
- Hiperbolikus komplex számok esetén a jelenséget leíró komplex formula abszolút értéke zérus. A hiperbolikus komplex zérusvektora (eltérően a komplex nullvektortól) határozott iránnyal rendelkezik $\Theta = 45^\circ$ bármekkora is a vektorkomponensek (amelyek nem szükségképpen zérusok). Ez a $\Theta = 45^\circ$ –os irány épp „c”-nek felel meg.

Azaz a komplex leírás a fény csillapításmentességét, míg a hiperbolikus komplex a sebesség állandóságát ragadja meg. Így *Einstein* az ívelemnégyzet konstans voltát kijelentve az alkalmazott geometriától függően a csillapításmentességet és fénysebesség állandóságát definiálta, vagyis ha egyik koordináta rendszerből a másikba transzformáljuk az elektromágneses jelenséget akkor:

Az eredetileg csillapításmentes jelenség továbbra is csillapításmentes marad, vagy sebessége nem változik.

Természetesen a csillapításmentesség egyben a megfigyelhetetlenséget jelenti, mivel minden megfigyelés energiaelvonással jár. A hiperbolikus zérusvektor komponenseinek határozatlansága pedig bármilyen x és t koordináta esetén garantálja $c = \text{konst}$ értéket.

$$|ds^2| = dx^2 - (cdt)^2 = 0 \quad (5.25)$$

ahol $c = dx/dt$, de dx és dt bármilyen nagy vagy kicsi értéket felvehet.

Mivel minden zérusvektor egyenlő, ezért a megfigyelés ugyancsak lehetetlen, mivel az a zérusvektorok közti önkényes választást igényelné.

Azonban van még egy lényeges momentum:

Einstein ugyanis ellenvetéseinek nagyobb részét a *Galilei*-transzformációval kapcsolatban fejti ki, miközben az *Euklidesz* geometria problémáira utal. Mint az jól ismert a *GALILEI* és az *EUKLIDESZ*-i geometria nem ugyanaz és mindkettő különbözik a *MINKOWSKI*-i geometriától.

A fentiek alapján levonható az a következtetés, hogy *Einstein* a speciális relativitás elméletében 3 féle geometriával foglalkozott, felváltva és következtetlenül alkalmazva ezeket. A probléma részletes tisztázása nyilvánvalóan elengedhetetlen. Ez azért is rendkívül fontos, mivel *Einstein* hangsúlyozottan teszi a geometriát olyan alapnak, melyből a fizikai világ tulajdonságai származtathatóak.

^{||}A gravitációs tér elhanyagolása esetén.

5.2. GEOMETRIÁK ÉS KOMPLEX SZÁMOK

Tömören tehát a következőképp foglalható össze a speciális relativitás elméletében előforduló geometriai és a hozzájuk kapcsolható komplex számokkal kapcsolatos állásfoglalások:

1. A *Galilei*-transzformáció korlátozott érvényű illetve helytelen és ezzel kapcsolatban a tér *Euklidesz-i* felépítése sem fogadható el.
2. *Einstein* az idő megkülönböztetésére bevezeti az *Euklidesz-i* geometriához kapcsolódó komplexben használatos képzetes egységet és ennek segítségével képezi a *Minkowski* geometriához kapcsolódó hiperbólikus komplex számok abszolút értékét, amelyre megköveteli az invarianciát.
3. Bevezeti a *Lorentz* transzformációt és kombinálja képzetes egységgel.
4. A képzetes egységgel kibővített *Lorentz* transzformáció és a hiperbólikus komplexben használatos abszolútérték képzésére hivatkozva a téridő szerkezetének jellemzésére a *Minkowski geometria* általános alkalmazását tartja szükségesnek.

Jól érzékelhetően kitűnik az eddigiekből, EINSTEIN már eredeti elképzeléseiben is összekeverte GALILEI és EUKLIDESZ geometriáját, majd egy önkényes lépéssel bevezette a képzetes egységet az időkoordináta elkülönítésére, aminek következtében egy harmadik geometria alkalmazása is sorra került, amit későbbi kidolgozójáról MINKOWSKI-ról neveztek el.

Mindez rendkívül lényeges, éppen EINSTEIN azon állásfoglalása következtében, amely szerint a tér szerkezetét és jellemzőit, annak geometriájából kívánta származtatni. Véleménye szerint:

Csak ez a felfogás alkalmas a tér-idő rendszer következetes és megbízható leírására.

Feltehető: EINSTEIN a speciális relativitás elméletének megalkotásakor nem rendelkezett a szükséges geometria-matematikai apparátus teljes ismeretével és ennek következményei a fentebb felsorolt zavarok.**

Az előzőekben leírtak alapján levonható a tanulság, hogy a speciális relativitás elméletével kapcsolatban a geometriák és az egyes számrendszerek illetve algebrák következetes alkalmazásának nagy jelentősége van. Az alábbi idézetben jól összefoglalt módon benne foglaltatnak az egyes algebrák legfontosabb jellegzetességei:

„Egyes algebrák kivételes helyet töltenek be az algebrák végtelen sokaságában. Ezek — a komplex számok \mathcal{K} algebrája, a kvaterniók \mathcal{Q} algebrája^{††} és a Caley számok \mathcal{O} algebrája. De igazából miben is különböznek

**Ismeretes, hogy Einstein maga matematikából „gyenge” volt és felesége dolgozta ki a matematikai részeket, másrészt Minkowski még kezdeténél tartott geometriája megalkotásának, amikor az alkalmazásra került a speciális relativitás elméletében és a hozzá tartozó transzformációs formulák már rég megszülettek és LORENTZ volt első jelentős használója. A Lorentz- transzformációhoz nem volt szüksége hiperbólikus geometriára.

^{††}Az itt szereplő kvaternióknak csupán az $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ képzetes egységelemmel rendelkező algebrát értik, amely a komplex számok 4 dimenziós kiterjesztésének tekinthető.

ezek a többi algebrától ? Erre a kérdésre többféleképp is lehet felelni, de a különböző válaszokban megjelenik egy közös gondolat: a többiekkel összehasonlítva ez a három algebra áll legközelebb az ősalaphoz: a valós számok \mathcal{D} algebrájához. Ez például abban mutatkozik meg, hogy

1. Csak a \mathcal{D} , \mathcal{K} és a \mathcal{Q} algebrának van meg az a tulajdonsága, hogy az osztás elvégezhető benne, és a szorzás asszociatív, ez az állítás, kicsit pontosabb megfogalmazásban Frobenius tételeként ismert.

2. Csak a \mathcal{D} , \mathcal{K} , \mathcal{Q} és az \mathcal{O} algebrának van meg az a tulajdonsága, hogy az osztás elvégezhető benne, és igazak az $(\mathbf{uv})\mathbf{v}=\mathbf{u}(\mathbf{vv})$ és $\mathbf{v}(\mathbf{vu})=(\mathbf{vv})\mathbf{u}$ összefüggések (az asszociativitás gyengített változata, az ugynevezett alternitívitas). Ez az állítás az általánosított Frobenius tétel.

3. \mathcal{D} , \mathcal{K} , \mathcal{Q} és a \mathcal{O} -n kívül nincs más olyan egységelemes algebra, melyben oly módon lehetne skaláris szorzatot bevezetni, hogy „szorzat normája egyenlő legyen a normák szoratóval„. Ez az állítás a Hurwitz-tétel.

Egyszóval az algebrák hierarchiába rendeződnek: az „alapok alapja” a valós számok algebrája. A legközelebbi szomszéd a komplex számok algebrája, melyben a szorzásnak minden fontos tulajdonságát megtartja: kommutatív, asszociatív, invertálható (más szóval elvégezhető az osztás) és a szorzásnak létezik egységeleme. Ezután következik a kvaterniók algebrája: az előbbi tulajdonságok közül itt csak a szorzás kommutativitása vész el. Már odébb helyezkedik el a Cayley számok algebrája....”

([11] I.L.Kantor—A.SZ.Szolodovnyikov: Hiperkomplex számok.108-109. o. Budapest, Gondolat Kiadó. 1985.)

A speciális relativitás elmélet rendszerébe, végül is 3 féle geometriai rendszer került bele:

1. *Galilei* féle geometria
2. *Euklideszi* geometria
3. *Minkowski* geometria

A fenti három geometriának megfelelően létezik egy-egy a geometriák párjaként használható komplex számrendszer és annak aritmetikája, amely éppen a felsorolt 3 féle geometria mozgatásait alkalmazza a komplex síkon illetve kvaternió alakban a négydimenziós konfigurációs térben. A számok ezen rendszerei az alábbi számoknak nevezik:^{‡‡}

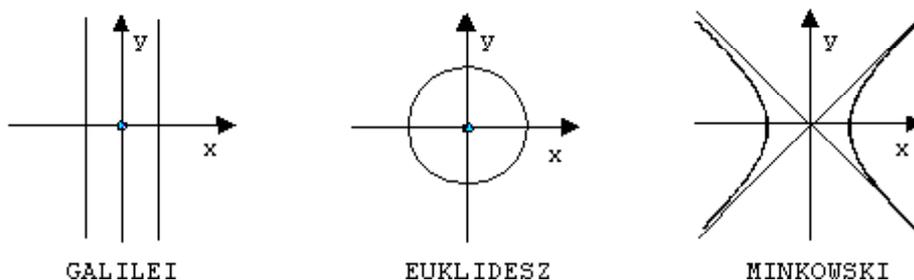
1. *Study* féle számok: $a+i\mathbf{b}$ ahol $\mathbf{i}^2 = 0$
2. Komplex számok: $a+i\mathbf{b}$ ahol $\mathbf{i}^2 = -1$
3. Hiperbolikus komplex számok: $a+i\mathbf{b}$ ahol $\mathbf{i}^2 = 1$

A számok és a geometriák a következő kapcsolatban állnak egymással:

1. *Galilei* geometria - *Study* féle számok

^{‡‡}Részletesebben: I.L. Kantor-Szolodovnyikov: Hiperkomplex számok, 2§.1985. Gondolat.

KÖR HÁROM GEOMETRIÁBAN
EUKLIDESZI SÍKON ÁBRÁZOLVA



1. ábra.

2. *Euklideszi* geometria - komplex számok
3. *Minkowski* geometria - hiperbólikus komplex számok

A három geometria közti különbséget a legegyszerűbben úgy lehet szemléltetni, hogy *Euklidesz* síkon ábrázoljuk az origó köré rajzolt kört:

- a Galilei féle rendszer szerinti kör két az y tengellyel attól sugárnyi távolságra lévő párhuzamos egyenes*
- a Minkowski féle kör a 45° -os egyenesekre mint asszimptotákra illeszkedő hiperbolák a valós és képzetes körök. (Nyilvánvaló, hogy ha képesek lennének szemléltetni közvetlenül a galilei illetve a hiperbólikus síkot ott mindkét esetben „kört” kellene látni.)

Mint az igen jól ismert *Einstein* a *Minkowski*-geometria bevezetésének három fontos következményt tulajdonított, a *Lorentz* transzformációval összefüggésben:

1. A két és négydimenziós téridő ívelemnégyzete és ehhez hasonlóan képzett két és négydimenziós mennyiségek abszolútértékének invarianciája.
2. A két és négydimenziós mennyiségek skalár szorzatának invarianciája.
3. A vektoregyenletek közti összefüggések alakja, amely a két és négydimenziós vektorok közti összefüggéseket írja le, ugyancsak invariánsak.

A *Lorentz* transzformáció (amelynek formája képezi a fenti invarianciát) egyben tartalmazza a speciális relativitás elmélet másik posztulátumát a fénysebesség maximális voltát, mégpedig olyan formában, hogy elvi lehetetlenségnek tűnik a c -nél nagyobb sebességek létezése.

Itt került igazán nehézségek elé *Einstein*, ugyanis míg két dimenzióban volt transzformációs formulája, négydimenzióban nem rendelkezett, ilyenrel, ugyanis két dimenzióban léteznek a komplex számok, négydimenzióban csak a kvaterniók léteztek,

*A Galilei geometriában az 1. ábrán látható körnek, nem csupán az origó a központja, hanem az „ y ” tengely minden pontja.

amelyek azonban nem adták ki az ívelemnégyszet kívánt alakját, ezért dolgozta ki számára *Minkowski* 4×4 -es tenzort és algebráját, hogy megfelelő matematika apparátus álljon rendelkezésére.

Magam nem ezt az utat követtem, mivel kiderült — mint az a 3., 4. és 5. ábrák összevetéséből is látszik, hogy a *Galilei* és *Minkowski* geometriában a forgatások és a szögek eltérő számításából, valamint más különbségekből adódóan a *Michelson—Morley* kísérletet négydimenziós geometriában lehet csak kiszámolni és ahhoz kell illeszkedni az algebrának. Márpedig sem a *Galilei* sem a *Minkowski* geometriához nem illeszkedett a négydimenziós tenzor, az eredetileg[†] az *Euklidesz* geometria alapján komplex számok bevonásával kialakított és általánosított vektor, amely elsősorban a *Lorentz-transzformáció* négydimenziós kiterjesztését szolgálta. Mindez azért sem megfelelő, mivel a *Lorentz transzformáció* eredeti bevezetése, a valós számok \mathcal{D} algebrájában készült és mint ilyen még a komplex számokat sem vette figyelembe. Ezért a *Study* és a hiperbólikus komplex számokat négydimenziósra bővítettem, oly módon, hogy a képzetes egységek forgatási tulajdonságai megmaradjanak és a négydimenziós *Galilei és Minkowski geometriákhoz* illeszkedjenek. Itt nem szabad elfelejteni, hogy a természetben a hozzá illeszkedő geometria valósul meg, míg ennek matematikai leírása csak a könnyebb és kezelhetőbb - emlékeztetőül érdemes viszsza gondolni *Newton* munkájára, ahol igen nehéz és bonyolult szerkesztéseket végzett a bizonyítás során — ezért kell az alkalmazott algebrának a geometriához szorosan kapcsolódnia.

A három számrendszer és a hozzájuk tartozó geometriák következetes vizsgálata egyértelmű választ ad arra, hogy ez a két lényeges követelmény valóban csak a *Minkowski* geometria és a hiperbolikus komplex számok sajátja-e, s így ez a geometria valóban kitüntetett szerepet játszik a fizikai jelenségek megismerésének és leírásának során, vagy mindez pusztán a geometria és számrendszerek téves értelmezésén alapul. Mindenesetre már itt érdemes megjegyezni azt, hogy a relativisztikus jelenségek számítása során soha nem hiperbolikus komplex aritmetikát használnak, hanem mindig és következetesen a komplex aritmetikát, bár a négydimenziós mennyiségek bevezetésekor mindig történik hivatkozás a *Minkowski* geometriára.

A három komplex számrendszer vizsgálatához legelőször a komplex aritmetikában használatos fogalmak és kifejezések alakjait kell felírni. Ezek a következők:

1. A komplex számok két és négydimenziós alakjai és a képzetes egységek értelmezése.
2. A komplex számok abszolútértékei és azok tulajdonságai.
3. A komplex számok argumentumai és annak értelmezése.
4. A komplex számok közti aritmetikai műveletek végzésének szabályai.
5. A kétdimenziós komplex számsíkon értelmezett elforgatások és azok jellemzései.
6. A négydimenzióban értelmezett szorzások és a térbeli forgatások.

[†]A tenzorok elméletének kidolgozása végül is a *Riemann-féle elliptikus* geometria alapján került sor, amely határesetben *Euklidesz*-ivé válik, az ívelemnégyszete éppen úgy pozitív definit, mint az *Euklidesz*-i, míg az *Einsteini ívelemnégyszet* indefinit elem.

A Lorentz transzformáció klasszikus bevezetése megtalálható például: [12] Dr. Novobátzky Károly: A relativitás elmélete című művében, Budapest, Tankönyvkiadó 1964. 22-24. oldal.

7. Az egyes komplex számrendszerekben értelmezhető függvények.
8. A fenti komplex számrendszerek és a további számrendszerek kapcsolata és összehasonlítása.

Megjegyzés: a felsorolt tulajdonságok tárgyalása minden olyan esetben, amikor *Einstein* a jelzett formulák valamilyen jelentőséget tulajdonított a speciális relativitáselmélet kapcsán, arra mind a három rendszer esetén ki kell térni és az értelmezési problémákra választ kell adni. Külön érdemes foglalkozni azzal a problémával, hogy milyen fontosabb differenciál egyenlet megoldások alakulnak ki az eltérő komplex számrendszerekben, ami mindezidáig nem tárgyalt probléma.

A felsoroltakkal, a jelen könyv csak annyiban foglalkozik, amennyiben, az a téma kifejtéséhez szükséges egyebekben az irodalomra kell támaszkodni.

5.3. NÉHÁNY GONDOLAT

5.3.1. *Einstein és a speciális relativitás elmélet*

A speciális relativitáselmélet megszületésének néhány körülménye.

„1900-as év Einstein számára különleges volt: Ekkor tette közzé Planck a hatáskvantum létezésének a mechanika és elektrodinamika törvényeinek ellentmondó eredményeit....

„Minden kísérletem –írja Einstein Önéletrajzában–, hogy a fizika elméleti alapjait ezekhez az eredményekhez illesszem teljesen kudarcot vallott. Úgy tűnt, mintha kicsúszott volna a talaj a lábam alól, és sehol sem látszott szilárd föld, amelyre építeni lehetett volna... Egyéni érdeklődésem ezekben az években nemcsak Planck eredményeinek bizonyos következményeire irányult... ..Már nem sokkal 1900 után, azaz nem sokkal Planck alapvető munkájának megjelenése után világosan láttam, hogy sem a mechanika, sem a termodinamika, nem vindikálhat magának teljes pontosságot... Mennél tovább és mennél elkeseredetebben kutattam, annál inkább arra a meggyőződésre jutottam, hogy csak általános formális elv felfedezése vezethet megbízható eredményre. Mintául a termodinamika szolgált. Ott az általános elvét a következő állítás mondta ki: a természettörvények olyanok, hogy lehetetlen örökmozgót ... építeni. De hogyan találjunk ilyen általános elvet?”

([13] Illy József: A speciális relativitás elméletének megszületése. 409.o. Fizikai Szemle,1975.)

Ugyanekkor már korábban említettem, hogy Einstein-nek felesége—Mileva és tanára Minkowski segített, érdemes ezt részletesebben idézni, mivel Einstein fentebb kifejtett alkotói válságának kimenetele, sokban függhetett külső segítségtől:^{||}

„Mileva eleinte tartózkodóan viselkedett, de már az első félévben, az egyik laboratóriumi gyakorlat során hozzálépett Einstein bemutatkozott és egy

^{||}Az alábbi idézetekben szereplő *Mileva*, Mileva Markic szerb diáklány volt, aki Einsteinnel egy évfolyamra járt a zürichi egyetemre, ahol Minkowski mindkettőjük tanára volt.

mérési eredmény után érdeklődött, amelyet Milevának sikerült megkapnia, neki pedig nem. A közös munka idővel közel hozta egymással a hallgatókat és lassan Mileva is fölengedett. Közös kirándultak a hegyekbe, baráti kapcsolat alakult ki a csoport tagjai között.

Gyermekkoruk óta mindkettőjüket ugyanazok a kérdések foglalkoztatták, amelyekre hiába keresték a választ a könyvekben....Newton egy életrajzának elolvasása után feltette Milevának a kérdést: „Gondolt már arra, hogy néhány következtetésében Newtonnak nincsen igaza?” A lány úgy nézett rá, mintha valami illetlenséget kérdezett volna: „Mire gondol?” — kérdezett vissza. „Nekem úgy tűnik, hogy néha nem bizonyítja azt, amit törvénynek nevez. Csak kijelenti: így van! Talán valami olyasmi rejlik mögötte, amit ő sem tud.”....

A tanulásban a laborgyakorlatokon Mileva vállalkozó és kitartó volt. Ezáltal segítségére volt Einsteinnek, megerősítette hullámzó és kiegyensúlyozatlan munkakedvét. Mikor beszélt, nyíltan a megalapozott meggyőződés biztonságával tette, ami nagyon imponált Einsteinnek. Csodálta Mileva biztos és alapos tudását, amihez hasonlóval lánynál még nem találkozott. Milevával olyan barátra lelt, aki olykor — a matematikában — fölötte állt. Mileva nemcsak igen szorgalmasan tanulta a matematikát, hanem ahhoz is volt érzéke, hogy behatoljon a feladat lényegébe, s azt a legegyszerűbb és legegészségszerűbb módon oldja meg. Einsteinnek szüksége volt Milevára: támaszra lelt benne, nélküle lassabban haladt volna előre útján. Két teljesen különböző ember találkozott össze: Mileva pontosan tudta mit akar és tántoríthatatlanul törekedett célja felé. Einstein viszont határozatlan volt, inkább álmvilágban élt, mint a valóságban és könnyen engedett az idegen befolyásnak. Einstein életét egy ideig teljesen Mileva akarata, munkáját az ő ambíciója vezérelte.

... Noha professzora — Jean Pernet — igyekezett lebeszélni Einsteint a fizikai stúdiumokról, Mileva sohasem kételkedett Einstein tehetségében; ám azt is tudta állandó biztatásra, serkentésre szorul, magától nem képes kitartóan dolgozni. Az elbátortalanító figyelmeztetések ellenére Mileva tovább haladt a maga útján, mert biztos volt hitében és Einsteint mindenki fölé helyezte. Jobban bízott benne, mint önmagában.

.....1903. január 6.-án aztán polgári házasságot kötöttek...(A kislány csípőficammal jött a világra, amit csak akkor vettek észre, mikor járnai kezdett. Mileva egész életére sánta maradt.)...

....Mileva biztatta Einsteint, hogy teljesen szentelje magát kutató munkájára. Einstein saját bevallása szerint ő maga soha nem lett volna képes helyes munkaszokásokat kialakítani. Erre Mileva tanította meg, aki éjjel-nappal mellette ült és kimeríthetetlen energiájával szüntelenül lelkesítette. Einstein tétova, ingadozó, kételyekre hajlamos ember volt, aki soha nem tudta valójában mit is akar. Kríziseken ment át, nem bízott tehetségében, ám Mileva sosem kételkedett benne.

....„Mileva hisz a tehetségemben, abban, hogy fel tudom ismerni az igazságot a természet folyamataiban. Ő hívta fel elsősorban figyelmemet a világegyetemben feltételezett éter jelentőségére” — mondta Einstein Mileva fivérének.

.... Mileva nem alkotótársa volt Einsteinnek, mint ahogy senki más nem lehetett volna az, de Einstein megtárgyalta vele gondolatait, s a kvantumelmélet kiterjesztésére és a speciális relativitáselméletre vonatkozó elképzeléseit ő öntötte matematikai formába. Hermann Minkowski, Einstein egykori tanára, aki jól ismerte őt és barátja volt, munkái megjelenésekor ezt mondta Max Bornnak: „Nagy meglepetés ez számomra, mert Einstein világlustája volt és a matematika egyáltalán nem érdekelte.”

Maga Einstein jelentette ki egyszer baráti társaságban: „Szükségem van a feleségemre. Minden matematikai problémát megold nekem.” Egyik ismerősük írja emlékirataiban: „Úgy néztünk fel Milevára, mint egy istennőre: imponáló volt a matematika tudása és zsenialitása. Az egyszerűbb problémákat fejben oldotta meg, két nap alatt pedig olyanokat, amik megoldásához ügyes matematikusoknak hetekre lett volna szükségük. Mindíg eredeti, sajátos és rövid megoldást talált. Mindannyian tudtuk, hogy ő volt Einstein dicsőségének kovácsa. Ő oldott meg számára minden matematikai problémát, különösen ami a relativitáselméletét illeti. Egyszerűen megdöbbentő, hogy milyen ragyogó matematikus volt.”

...Einstein korszakalkotó dolgozatai 1905-ben jelentek meg az *Annalen der Physik*-ben. Abraham Joffe arra hívja fel a figyelmet „Visszaemlékezések Albert Einsteinre” című munkájában, hogy a „Mozgó testek elektrodinamikája” kéziratán Einstein–Maric aláírás szerepelt.

...Hogy mekkora része és érdeme volt Milevának Einstein művében, azt egyelőre nem lehet megállapítani. Levélváltásuk a New-York-i „Estate of Albert Einstein”-ben fekszik lepecsételve és különböző kifogások miatt nem hozzáférhető.

([14] Gogola Aladár: Einstein árnyékában, *Természet Világa*, 1988/2. 64.-67. oldal. A szerző a következő előszót írta cikke elé:

„A jugoszláviai Krusevác városában a „Bagdala,, kiadónál jelent meg Desenka Trbuhovic-Gjuric asszony Milava Maricról Einstein első feleségéről írott életrajza „U senci Alberta Ajstajna” (Albert Einstein árnyékában) címmel. A cirill betűkkel nyomtatott könyv csak szűk körben vált ismertté és eleinte a nemzetközi Einstein kutatás sem szerzett róla tudomást. Ez a helyzet csak akkor változott meg, mikor a művet a Paul Haupt kiadó német nyelven is megjelentette.)”

A továbbiak előtt érdemes kitérni arra, amit Einstein Minkowskiról írt nevezetesen „*Önéletrajza*”-ban a speciális relativitáselmélettel kapcsolatban:

„Minkowski fontos hozzájárulása az elmélethez a következő: Minkowski kutatásai előtt a törvényeken végre kellett hajtani a Lorentz-transzformációt ahhoz, hogy ellenőrizhessük a törvényekre vonatkozó invarianciáját.. Neki azonban sikerült olyan formalizmust bevezetnie, amelynek alkalmazásával a törvények matematikai alakja biztosítja a Lorentz-transzformációkkal szemben invarianciáját. A négydimenziós tenzorszámítás, megalkotásával létrehozta a négydimenziós tér számára ugyanazt a segédeszközt, amit a három térbeli dimenzió eseténben a közöséges vektoranalízis

szolgáltat. Azt is bebizonyította, hogy a Lorentz-transzformáció (eltekintve az idő különleges jellege által okozott előjeltől) nem egyéb, mint a koordinátarendszereknek a négydimenziós térben való elforgatása.,

([15] A.Einstein:Válogatott tanulmányok (Önéletrajz) 293.o.Budapest, Gondolat Kiadó, 1971.)

Lánczos Kornél az 1930-as években éveken át *Einstein* állandó, közvetlen munkatársaként dolgozott, ezzel kapcsolatban érdekes előadást tartott 1973-ban Szegeden, ennek egy hosszabb részletét idézem:

„...És mégis: az Einstein-féle elméletben is maradt két lényeges árnyék.

Az egyik árnyék az volt, hogy az új geometria, bár úgy nevezzük, hogy „Riemann-féle”, a valóságban egyáltalán nem volt Riemann féle.Azt, hogy a 3—dimenziós geometriát 4 dimenziósra kell kiegészíteni, azt már a speciális relativitás a Minkowski-féle fogalmazásban is megmutatta és ebben többé kételkedni nem lehetett. Tér és idő összetartoznak, egyetlen négydimenziós egységet alkotnak. Ez minden kétségen felül állt. De ha megnézzük a két szomszédos pont közötti távolságot a Minkowski-féle megfogalmazásban, akkor egy különös és érthetetlen jelenséggel találkozunk. A híres Pythagoras-tétel szerint a két szomszédos pont távolságát így írhatjuk fel:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Ha hozzáveszünk egy harmadik dimenziót, akkor ebből lesz:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Ha hozzáveszünk egy negyedik dimenziót, akkor ebből lesz:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2$$

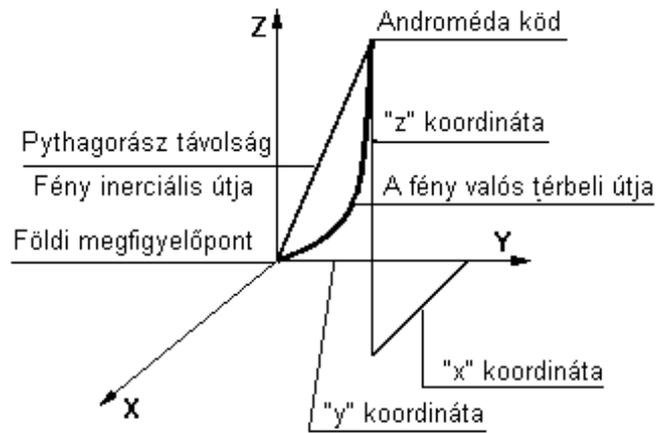
Amit azonban a fizikában találunk, az:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2$$

Ez a csodálatos szaltó mortále a negyedik dimenzióban nekem úgy tűnt fel, hogy az egész geometriát agyoncsapja. Gauss és Riemann kétségkívül egy ilyen geometriát abszurditásnak tartottak volna, mert ellentmond minden természetes geometriai intuíciónak. Miért csinál a természet olyan baklövést, hogy egy plussz jel helyébe egy minusz jelet tesz ?

Mindig bámultam azon, hogy egy ilyen látszólagos abszurditást milyen könnyedén tudtak lenyelni a fizikusok és a matematikusok. Erről sokat vitatkoztam Einsteinnel.Ő kétségkívül érezte, hogy ezen minuszjel mögött egy nagy titoknak kell rejtőznie. De hát abból, hogy a Lorentz-transzformáció olyan jól beválik, arra kell következtetni, hogy ez a sajátságos távolságkifejezés tényleg megvalósul a természetben. Geometriai szempontból kétségkívül abszurditással állunk szemben. Ez azonban Einsteint nem nagyon bántotta. Ő úgy gondolkodott, hogy a geometria vagy a

LÁNCZOS KORNÉL PÉLDÁJA



A fény inercia térben és a valós térben megtett útja

2. ábra.

fizika csak általunk felállított kategóriák. Miért kellene annak, amit a világrend geometriájának nevezünk feltétlenül összeesni a mi szokásos felfogásunkkal? Öneki a Riemann-féle görbületes tenzorban az imponált, hogy általánosan kovariáns volt, vagyis minden koordináta-rendszerben lehetett használni. Ebből a szempontból a definit vagy indefinit vonalelem egyforma jelentőségű volt. De ha arra gondolunk, hogy Gauss-Riemann-féle geometria *differenciálgeometria volt*, vagyis arra volt felépítve, hogy egy pont *szomszédságát* mérjük ki, akkor mindjárt jelentkezik az indefinit vonalelem paradox tulajdonsága. Itt tudniillik nem lehet „szomszédság”-ról beszélni. Egy valódi Riemann-geometriában „nulla távolság” azt jelenti, hogy a két pont összeesik. A Minkowski-féle geometriában nulla távolság lehet két pont között, amelyek millió kilométer távolságban vannak egymástól. Az Androméda-köd, melyet szabad szemmel is láthatunk a csillagos égen, három millió fényév távolságra van tőlünk. Az a foton, mely most érkezik a szemünkhöz, három millió év előtt hagyta el az Androméda ködfoltot. De a négydimenziós távolság a foton és a szemünk között *állandóan zérus volt*, foton egész utazása alatt. Miért nem volt kölcsönhatás a foton és a szemünk között az *egész 3 millió év alatt*, csupán a megérkezés pillanatában? Ezt geometriailag megmagyarázni nem lehet. A „szomszédság” fogalma itt elvész, de akkor a differenciálgeometria is elveszti értelmét, és ezzel a Riemann-tenzor is elveszti értelmét, és ezzel a Riemann-tenzor is csupán mint analitikus mennyiség marad meg, nem mint *geometriai mennyiség*. Véleményem szerint itt nagy árnyék esik az Einstein-féle *geometria* gravitáció-elméletre.”

([16] Lánzos Kornél: Einstein és a jövő. 161.o.Fizikai Szemle 1974.június.)

Lánczos Kornél fentiekben leírt súlyos felvetésére azonban korántsem olyan nehéz a válasz, mint az első pillanatra látszik. Először is érdemes a korábbiakban leirtakra emlékezni, ahol a geometriai tér és a fizikai tér közti különbségről van szó és arról, hogy a geometriai tér \rightarrow fizikai tér irányú következtetések (az absztrahálás során elvesztett-elhanyagolt jelenségek) okán komoly hibákkal lehetnek terhelvek.

Pontosan miről is van szó: az *Einstein féle* ívelemnégyszetet s^2 -tet definíciószerűen zérusnak tekintik a térben terjedő fény esetében. Az inerciális térbeli távolságot a Pythagorász tétel alapján, az ortogonális koordinátarendszerben következőképp definiálják:

$$|\mathbf{r}^2| = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5.26)$$

mivel, feltételezik, hogy a fénysugár pontosan ezen az úton halad a két pont között, természetesen adódik:

$$|\mathbf{r}|^2 = c^2 t^2 \quad (5.27)$$

azaz, ha

$$|\mathbf{s}^2| = |\mathbf{r}^2| - c^2 t^2 \quad (5.28)$$

akkor

$$|\mathbf{s}^2| \equiv 0 \quad (5.29)$$

azonban mindez nem igaz, — lásd 2.ábra — egész egyszerűen azért, mivel a felhozott példában fény nem az absztrakt-inerciális térben terjed, hanem a valós térben. Az absztrakt geometriai tér csupán az elméletben létezik, és az absztrakt-inerciális térben terjedő fény csupán absztrakt fény. *Lánczos Kornél* által említett esetben azonban, valós fizikai térben terjedő valós fényről van szó, amelynek legnagyobb különbsége az, hogy a valós térben gravitációs tér van jelen és kölcsönhat a fényvel, amely ezért változó görbültségű, geodetikus pályán halad. Azaz a csillagközi térben terjedő fényre nem használható a speciális relativitás elmélete, így az indefinit vonalelem se, erre az általános relativitás elméletében használt pozitív vonalelem használható:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + c^2 dt^2 \quad (5.30)$$

Mint az már korábban is említésre került, a fény pályája a gravitációs térben a leghosszabb, míg az odahelyezett absztrakt-inerciális tér *Pythagorász-féle* térbeli távolsága, az absztrakt fény számára a legrövidebb. Ennek következtében az *Einstein féle* négydimenziós konfigurációs valós ívelemnégyszet az említett példában az absztrakt-inerciális térben terjedő fény és a valós térben terjedő fény különbsége, és ez sohasem nulla, hanem egy kezdeti kicsiny negatív értéktől állandóan növekvő szám, amely nullává az észlelés pillanatában válik:

$$|\mathbf{s}^2| \leq |\mathbf{r}^2| - c^2 t^2 \quad (5.31)$$

És itt kell visszatérni *Einstein idő posztulátumára*, abban az egydimenziós távolságot a merev *Euklidesz* methodussal mérik:

„Legyen adva egy koordinátarendszer, amelyben a Newton-féle mechanikai egyenletek érvényesek. Ezt a koordinátarendszert a később bevezetendő koordinátarendszerektől való megkülönböztetés, s elképzeléseink pontosítása céljából, „nyugvó rendszernek” nevezzük majd. Ha egy anyagi pont eme koordinátarendszerhez viszonyítva nyugalomban van, helyzete az utóbbihoz képest merev mérőrudakkal és az euklideszi geometria módszereinek a felhasználásával meghatározható, és derékszögű koordinátákkal kifejezhető.”

Ugyanakkor az idő mérése a valós fizikai térben terjedő fényvel futási idejével történik. Mivel a valós térben jelen van a gravitáció, a fény útja az időszerű geodetikusan megtett út, hossza mindenképpen nagyobb mint az *Euklidesz-i* térbeli hossz, ezért a mért idő is nagyobb, mint a hosszhoz tartozó absztrakt idő: amire érvényes lenne az *Einstein ívelemnégyzetének* zérus hossza, ezért az **Einstein-féle idődefiníciós mérésben az ívelemnégyzet hossza nem zérus.** (A jelenleg alkalmazott hosszúság standard, amely nagystabilitású atomi oszcillátor hullámhosszával definiáltak is hibás, mert merev hosszmértéknél nagyobb a mérés során megtett fényút.)

Mostmár adódik a következtetés, hogy a valós térben, hogy a valós tér számítások szempontjából nem tisztán **3+1 dimenziójú**, mert a gravitációs hatást úgy is, figyelembe lehet venni a dimenziószám segítségével, hogy valamivel kisebb mint 4 dimenziószámot veszünk figyelembe, amint azt az idézett kvantummechanikai mérések-nél is tették. Ezen túl azonban a csillagászati vizsgálatok egy további irányba is mutatnak, a nevezetes Merkur perihélium elfordulás általános relativitás elméleti magyarázata, a gravitációs tér figyelembevétel után, még mindig maradt $\sim 5 \cdot 10^{-11}$ nagyságú hiba, amit az *Ehrenfest* által kidolgozott elmélet alapján dimenziószám kicsiny csökkenésével lehet magyarázni.

Mindez arra utal, hogy az *Einstein-féle speciális relativitás elmélet* egyik alapvető megállapítása az ívelemnégyzet invariáns volta épp az alapvető elektrodinamikai területen nem kielégítő pontosságú. Az önmagára is visszaható gravitációs tér hatása is a dimenziószám kicsiny csökkenésében jelenik meg az elmélet és a valóság összevetése során. A csillagászati és a kvantummechanikai mérések hasonló nagyságrendje pedig arra utal, hogy éppen az elektromágneses módon végrehajtott mérések a dimenziók figyelemben nem vett eltérése a kerek 4-es számtól épp a 10^{-11} pontossági határnál már jelentős hibát okozhatnak.

Hosszú évekig vita folyt arról, hogy mekkora területet lehet lefedni az inerciális rendszerekkel, a kezdeti álláspont az volt, hogy gyakorlatilag a teljes Univerzumot, ennek következménye volt Einstein nevezetes iker-paradoxona. Ami legalábbis sok fényévnyi távolságban is érvényesülőnek tartotta a speciális relativitáselmélet idődilatació jelenségét (ez igazolta volna a Földön maradó ikerek egyikének öregedését a másik közel fénysebességgel repülő testvér fiatalon maradásával), azonban a komolyabb vizsgálat kimutatta, hogy az inerciális rendszerek globalitása nem létezik, és tényleges kiterjedés néhány tíz méterre korlátozódik, példaként, a Föld körül keringő űrhajó belseje például nagy pontossággal inercia rendszernek tekinthető, azonban ennél több nagyságrendszerrel nagyobb valami, például a Föld már nem inercia rendszer. Még kevésbé állítható ez a galaxisokra miként azt Einstein nevezetes példájában „az iker-paradoxonban” tette.

(Bővebben Hraskó Péter: A relativitáselmélet című könyvének 3.4 Az inerciarendszerek lokalitása fejezetében. Typotex 2002.) **Ez az iker-paradoxon sokat jelentett a széleskörű népszerűsítés területén,**

tömegesen félrevezetve az embereket, a fizikai ismeretek tömeg tájékoztatásában megjelenő egyszerűsített ismertetéssel.

Összességében mindez azt is jelentheti, hogy a valós-fizikai térben mivel, a gravitáció hatása ortogonálisnak tekinthető a másik 4 téridő dimenzióra, valamint a dimenziószám nem kerek volta törtdimenziós jelentkezésében, további a dimenziókat módosító tényezőként csatolható a valós jelenségekhez, amit **3 tér (2módosító)+ 1 idő** dimenziós rendszerként fogható fel, amiből az idő és a két módosító tényező következtében az elektromágneses hullámok információ továbbító jellege csekély sérülésével **3 térdimenziós követelménye teljesül.**

5.3.2. Riemann elliptikus geometria \Rightarrow Tenzorok

Riemann 1854-ben megalkottott egy nagyon általános - elliptikus-geometriát,* melynek algebrájaként megszületett a 20. század elején a tenzorelmélet. Így szükséges kitérni arra, hogy a matematika fejlődése során a vektorok általánosításaként létrejött a tenzorelmélet, amelynek alkalmazása a fentebb említett zavarok kiküszöbölésére igen alkalmas eszközzé vált. A tenzoralgebra a lineáris terek, a lineáris algebrák és reprezentációik fokozatos általánosítása révén fejlődött ki. A tenzoralízis a tenzorokkal mint pontfüggvényekkel foglalkozik; elsősorban görbült terek és folytonos fizikai mezők leírására alkalmas. Tenzormódszerek segítségével gyakran kapcsolat létesíthető különböző vonatkoztatási rendszerekben mért bonyolult numerikus adatok és viszonylag egyszerű absztrakt modellek között.

A tenzorok szokásos alkalmazása során mérési sémákban a térbeli koordináták minden rendszeréhez egy meghatározott mérési elrendezést célszerű hozzárendelni, ebben az esetben két (vagy több) mérési séma koordinátái között egy tipikus (indukált) transzformáció létesít kapcsolatot.

Ezen túlmenően minden megengedett koordinátatranszformáció során, - ilyen a relativitáselméletben *LORENTZ* transzformáció - a tenzorkoordináták olyan szabályok szerint transzformálódnak, amelyek megőrzik az összeadás, a kontrakció és a külső (belső) szorzás eredményét, valamint a tenzorok egyenlőségét is. Minden tenzorok közti reláció, amely ezekkel a műveletekkel, esetleg konvergens határátmenettel fejezhető ki, invariáns a megengedett koordinátatranszformációk csoportjára nézve. Ha a tenzorkoordináták között egy reláció fennáll valamely vonatkoztatási rendszerben, akkor minden más vonatkoztatási rendszerben is fennáll. Ennek következtében tenzorokról és tenzorműveletekről vonatkoztatási rendszerre (koordinátarendszerre) való hivatkozás nélkül is beszélhetünk.

A fenti rövid összefoglalásból is kitűnik, hogy végső soron amikor *Einstein* a speciális relativitás meghaladásaként, megalkotta az általános relativitás elméletét, amely a tenzorokra épült és utóbb a tenzorfelfogás a speciális relativitás elméletébe is beépült, ugyancsak egyfajta abszolút vonatkoztatási rendszert hozott létre, egy olyan absztrakt modellt, amelyből minden valós rendszerbe transzformálni lehet az absztrakt model relációit illetve a jelenségek leírására szolgáló tenzorokat. Azaz a *Newton-i* abszolút tér, átlényegült egy a valóságon kívül álló absztrakt modellel, amelyet tenzor és a közöttük lévő műveletek és relációk írnak le.

Hozzá kell tenni, a tenzorok még egy fontos sajátosságát:

Egy tenzormennyiség kis megváltozásait vagy differenciáljait nem értelmezhetjük úgy, mint a tenzorfüggvény függvényértékeinek különbségét, a koordinátaival adott

Riemann eredeti elliptikus geometriája ténylegesen differenciál geometria, ebből léptek a nagyobb méretek irányába.

pont és annak kis megváltoztatásával kapott pont függvényértékeinek különbségét. Mivel a tenzoralképpben semmit sem mondunk a tenzorfüggvény különböző pontokban felvett „értékei” közti kapcsolatáról. Ennek következtében a speciális relativitás elméletében szokásosan használatos deriváltak közvetlenül nem, csak különböző feltételek teljesülése esetén használhatók. A feltételek teljesülése esetében a differenciálás konzisztens a vektoranalízisben alkalmazott differenciálással. Azonban a vektoralképp nem konzisztens a komplex számokkal és nem is teljes rendszer, mivel, három dimenzió esetén az osztás nem definiálható. (Tenzorok esetében definiált abszolút differenciál minden koordinátája két tagból áll: a koordináta relatív differenciálja, valamint a bázisvektorok két pont közötti megváltozásából, ami a metrika megváltozását jelenti.)

Ebből következik, hogy az abszolútra történő elvi törekvés elvetése, ami kimagaslóan helyes elvi törekvés, végső soron két másik abszolút jelenséget állított az elmélet középpontjába:

1. A fizikai jelenségek általános és abszolút tenzor jellegét
2. A sebesség maximumaként a fénysebességet

A fentieknek egy további következménye is tapasztalható, ugyanis a tenzorok definiálása következtében az egyes fogalmakat *Einstein* kénytelen volt mérési utasítások segítségével definiálni, ami ugyancsak nem helyes eljárási eljárás.

Einstein azonban ennél is továbbment és a tenzorokat a pozitív definit *Riemann* téren értelmezte, ahol alapvető fogalomként jelent meg a reguláris felületelemen értelmezett geodetikus vonal, amelyek a *Riemann* térben az olyan reguláris ívek, amelyek geodetikus görbülete azonosan nulla. (Az érintő egységvektor a görbe mentén konstans.) Ennek a geodetikus vonalnak sok közös tulajdonsága van az *Euklidesz*-i geometria egyenesével és a pozitív definit metrikájú *Riemann-féle* egyenes tereket valós *Euklidesz*-i térnek nevezik. ([18] Dodson és Poston : *Tensor Geometry* 1977. című művében bizonyítja, hogy „a relativitáselméletben azonban az „időszerű” geodetikus vonalak a leghosszabbak”.) Fontos megjegyezni, hogy ez a fajta egyenes tér jelen tudásunk szerint kisebb mint 10 millió kilométeren belül *Euklidesz*-i tér. Aminek következtében *Einsteinnek* a Földön végzett kísérleti és ebből származó elméleti problémák miatt az elektromágneses jelenségek terén *Euklidesz*-i geometriát eleve kizáró véleménye nem volt kellően megalapozott, és ma sem az. Ebből egyértelműen következik, hogy az *Euklidesz*-i geometriát a relativitás elvének felhasználásával újra meg kell vizsgálni.

5.4. BEFEJEZŐ ELMÉLKEDÉSEK

Amint az tapasztalható a korábbi vizsgálatok alapján kell valami lényeges tulajdonságnak lenni a három geometriában, ami mintegy biztosította, hogy az összekeveredésük ellenére, nem került a felszínre ellentmondás, amely komoly zavarokhoz vezetett volna. Mint az jól ismert a fizikai jelenségek területén két alapvető geometriai forma van amely az elemzések kiindulásául szolgál:

1. Az egyenes, amely a mechanikai tehetetlenségi mozgások alapvető formája. Nagyon feltűnő módon a fény sugár éppen ilyen úton halad a „mezőmentes” szabad-euklideszi térben.

2. A kör, amely a periódikus jelenségek alapvető formája, mondhatni maga a tiszta periódikusság. Belőle származtatjuk a periódikus függvényeket, amelyek ugyancsak feltűnő módon leírják a fényt mint hullámjelenséget. Ennek alapján célszerű keresni a három geometriára illetve a három komplex számrendszerre olyan közös tulajdonságot, amely a körre és az egyenesre egyaránt vonatkozik, egyben a fizikai jelenségekhez is kapcsolható:

Ilyen tulajdonság az, hogy mind a három rendszerben az a kifejezés, amely leírja az egyenes egyenletét két rögzített és egy futó pont segítségével egyetlen közös követelménynek kell, hogy eleget tegyen: az egyenlet képzetes része zérus kell hogy legyen azaz:

$$\operatorname{Im}(f(x, y, z)) = 0 \quad (5.32)$$

Ez azt jelenti, hogy egy tehetetlenségi mozgás, amely természetszerűleg egyenes és a fény terjedése mely a szabad térben szintén az, csak valós lehet, azaz nem tartalmazhat képzetes tagokat. Ez kiválóan illeszkedik a tehetetlenségi mozgásokkal kapcsolatos ismereteinkre, mivel azok csak valós elemeket tartalmaznak. Mint az jól ismert a valós elemeket időszűrűeknek tekintik és az ilyen jelenségekre igaz az okság elve. A képzetes elemeket térszűrűeknek mondják és az okság elve az általános felfogás szerint nem igaz.

- A fentiek úgy kapcsolódnak a fizika elméletéhez, hogy a korábban említett három feltételből az első kettő, melyek az észlelt jelenségek energia megmaradását jelentik a *Lorenzt* transzformáció során, elsősorban azért volt nagy jelentősége, mivel XIX. és a XX. század fordulóján az úgynevezett energetista szemlélet uralkodott, ami a jelenségek vizsgálatának középpontjába az energiamegmaradás törvényét és ezzel kapcsolatban a vektormennyiségek skalár szorzatát helyezte. (Ez egyben a geometriai feltételt is teljesítette, mivel a skalár szorzatok eredménye tiszta valós mennyiség.)
- A fenti energiamegmaradás elvén alapuló felfogás, azonban egyben a komplex jelenségeknél a fázisinformáció elvesztését jelentette. Ennek fontosságát különösen a kvantummechanikában vitatták. Azonban Gábor Dénes holografikus kísérletei rávilágítottak az elektromágneses hullámok fázisinformációjának fontosságára, azóta lassanként teret nyert az elektromágneses és a kvantummechanikai hullámfüggvények fázisinformációjának fontossága is. Ezért az olyan transzformációt, ami nem viszi át a fázisinformációt is, (márpedig a vektor abszolút értékét megtartó transzformáció éppen ilyen), az csak korlátozottan alkalmazhatónak lehet tekinteni.

Befejezés előtt érdemes itt egy már sokak által feltett kérdésre, valószínűleg nem pontos, de érdekes választ adni:

A kérdés: Mi lehet az alapvető ok, aminek következtében a matematika ilyen hihetetlenül alkalmas a fizikai problémák leírására és tárgyalására ?

Egy valószínű válasz: Sokan mai napig is úgy vélik, hogy az ókori görögök a geometria-matematikai tudásukat szám és zenemisztika révén

igyekeztek a zenében is érvényesíteni (innen ered a szférák zenéje kifejezés is), azonban a legújabb régészeti kutatások azt támasztják inkább alá, hogy a zene volt az alap, amelynek magyarázatára kezdték kifejleszteni a geometriai és algebrai tudásukat mint segédeszközt. Vagyis egy bonyolult rezgésméleti probléma volt az a fizikai jelenség, amire mint bázisra épült fel Euklidesz geometriája és annak axiómái. Feltehető, hogy ennek következménye, hogy az általunk ismert és használt matematikai apparátus ennyire alkalmas a fizika jelenségeinek leírására, ne feledjük mindenki először az euklideszi geometriát és az ehhez kapcsolódó algebrát sajátítja el, minden egyéb erre a tudatunkba a legmélyebben beépült tudásra épül rá.

VÉGÜL

EINSTEIN legnagyobb érdemének azt tartják, hogy kiürítette a teret és téridő kontinuumot tett a helyére, mivel megszüntette az étert, mint a fény hordozóját.

Azonban érdekes lehet mi volt az Ő véleménye, amikor már mindez lezajlott?

Ez meg is jelent:

A.Einstein: Über den Aether, Ver. d. Schweizer. Nat. Ges., 105, II.rész
85-93. o. 1924.

„...Az általános relativitás elmélet étere abban különbözik a klasszikus mechanika, illetve a speciális relativitás elmélet éterétől, hogy az előbbi nem abszolút, hanem helytől függő tulajdonságait a ponderábilis anyag határozza meg ...

Az, hogy az általános relativitáselméletben nem léteznek kitüntetett koordináta rendszerek, amelyek a metrikával egyértelmű összefüggésben állnának, nem az elmélet formájára, hanem inkább az elmélet fizikai tartalmára jellemző.....

De még ezekből a lehetőségekből valódi elméletek érnének be, akkor sem volna lehetséges az étert, vagyis a fizikai tulajdonságokkal ellátott kontinuum fogalmát az elméleti fizikában mellőzni; ez így van, minthogy az általános relativitás elmélet amelynek alapgondolataihoz a fizikusok mindig ragaszkodni fognak, kizárja a távolhatást: minden közelhatásra felépülő elmélet feltételez mezőket és az éter létezését is.”

II. rész

**HÁROM ELEMI
GEOMETRIA, HÁROM
KOMPLEX SZÁM**

6. fejezet

Elemi transzformációk

GALILEI, EUKLIDESZ, MINKOWSKI-LORENTZ

6.1. Kétdimenziós távolságok

Einstein által sikeresen „cáfolt” *GALILEI*, az elfogadott *MINKOWSKI* geometriák szempontjából ismerjük a *MICHELSON-MORLEY* kísérlet¹ várható eredményét. A két geometria eltérő eredményt adott ezért célszerű a mellőzött *EUKLIDESZ* geometria szempontjából is megvizsgálni. Az egyértelműség érdekében ki kell jelenteni, hogy az alábbiakban tárgyalt három geometria és tárgyalása csak **gravitációmentes terekre érvényes**.

A fizika szempontjából a három geometria között legfeltűnőbb eltérés, két téridőbeli pont közötti távolság kiszámításának, azaz az erről nyerhető információ definíciójában van. Ugyanis d_{12} az adott koordináta-rendszerben két téridőbeli pont közt lévő távolság kiszámítása alapvető feladat, s végrehajtása jellemzi a rendszert magát is.

Az időtengely skálázását ct -ben felvéve a távolság kiszámítására a következő három formula adódik:

Legyen a téridő vektor:

$$\mathbf{s} = ct + \mathbf{i}x \quad (6.1)$$

akkor két pont $[0,0;x,t]$ téridőbeli távolságát az \mathbf{s}_{12} vektor abszolút értéke adja meg:

- *GALILEI* geometriában:

$$\mathbf{s}_{12G} = ct \quad (6.2)$$

- *MINKOWSKI* geometriában:

$$\mathbf{s}_{12M} = (c^2t^2 - x^2)^{1/2} \quad \text{ha } ct > x \quad (6.3)$$

$$\mathbf{s}_{12M} = (x^2 - c^2t^2)^{1/2} \quad \text{ha } ct < x \quad (6.4)$$

1. Michelson-Morley kísérlet mintegy reprezentánsát tekintjük a fény eltérő inercia rendszerekben töltendő mozgásának vizsgálatához, bár ezt Einstein maga nem ismerte, de több hasonlót igen és az ezen problémáról szóló elméleti megfontolásokat is. A XIX. század végén a téma mintegy a levegőben volt.

– *EUKLIDESZ* geometriában:

$$s_{12M} = (c^2t^2 + x^2)^{1/2} \quad (6.5)$$

Azonnal látható a három távolság meghatározási mód közti különbség. Az egyik legfontosabb: a *Minkowski* geometriában az „ $x \equiv ct$ ” vonal különleges, kitüntetett jelenséget jelöl meg. Olyan pontok téridőbeli helye, melyek jellemzően eltérnek a téridő sík egyéb pontjaitól, ugyanis ezen a vonalon a téridőbeli távolság bármely két pont között azonosan zérus, ami azt jelenti, hogy bármilyen hatás téridőbeli terjedésének sebessége végtelen. (Ez a newtoni távolhatásnak megfelelő jelenség.) Magától érthetődik, hogy ennél nagyobb sebesség nem létezhet. (Mivel az ilyen pontokat fény terjedése köti össze, ezért a fény téridő sebessége a *Minkowski* geometriában végtelen. *Einstein* legelső, az elektrodinamikáról szóló írásában meg is említi, azonban a speciális reletivitás elméletében már nem szerepel)

„A félynél nagyobb sebesség esetében fejtegetéseink értelmetlenné válnak: a következőkből egyébként is kitűnik majd, hogy elméletünkben a fénysebesség, a végtelen nagy sebesség szerepét játssza.”

([19] A. Einstein: Válogatott tanulmányok: A mozgó testek elektrodinamikájáról. 69.o. Gondolat Kiadó. Budapest, 1971.)

Tehát nem a fizikai valóságban végtelen nagy, csupán azon a matematikai felfogásban, amelyben *Einstein* tárgyalja elméletét. Ott természetesen a geometria felépítése következtében az állítás igaz.

A másik két geometria ilyen kitüntetett szereppel nem ruház fel semmilyen téridő síkbeli pontot. Következésképp a *Minkowski* geometriát akkor célszerű alkalmazni, ha valamilyen karakterisztikus sebességének kitüntetett szerepet kívánunk adni, amely elméleti határt vagy valamilyen rezonancia típusú jelenséget jellemez.

Amint azt az előzőkből már jól ismert a *Galilei* és *Minkowski* geometriákban „ α ”-a szöggel történő elforgatáshoz (a geometriai forgatások egyenértékűek az inerciarendszerek közti transzformációval) szorosan kötődő transzformációk tartoznak: a *GALILEI* és *LORENTZ* transzformációk.

Az *Einstein-féle speciális relativitás elmélet* valójában *Lorentz-féle* forgatási transzformáció széleskörű bevezetése a fizikai jelenségek körébe, és a fénysebesség állandóságának posztulálása, amit az alábbi hosszabb idézet igazol és bemutat:

„12.§. Téridő geometria*

Mint láthattuk, a *Galilei-féle* relativitási elvnek az *Einstein-féle* relativitási elvre való felcserélése egyenértékű azzal, hogy az egyik inerciarendszerről a másikra való áttérést leíró

$$\begin{aligned} x' &= x + vt \\ t' &= t \end{aligned} \quad (11.1)$$

*Az eredeti cím pontos fordítása: Minkowski geometria.

elemi *Galilei*-transzformációkat a kissé bonyolultabb

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \\t' &= \frac{-vx + t}{\sqrt{1 - v^2}}\end{aligned}\quad (11.7)$$

Lorentz-transzformációk váltják fel. De könyvünk alapjában azt a *geometriai rendszert* vizsgálta, amely akkor áll elő az $\{x, t\}$ koordináta síkon, ha „mozgások” gyanánt a *Galilei*-transzformációkat vesszük; ezt a „geometriát” — amelyek mind interpretálhatók az egydimenziós kinematikában — *Galilei*-geometriának nevezték el. Így aztán szinte természetes, hogy érdemes lenne az $\{x, t\}$ síknak azzal a geometriájával is foglalkozni, amelyben a mozgások a *Lorentz*-transzformációk lennének. Erre a geometriára *Hermann Minkowski* kiváló német matematikus és fizikus (1864–1909) utalt elsőnek, és felvetette, hogy evvel „geometriai alakban” lehetne leírni a relativisztikus mechanika jelenségeit. Ezt a geometriát többnyire (pszeudoeuklideszi) *téridő-geometria* néven ismerik.*

A *Galilei*-síkon az

$$\begin{aligned}x' &= x + a \\y' &= vx + y + b\end{aligned}\quad (11.1')$$

transzformációk a mozgások. Ezek a mozgások annyiban különböznek a (11.1) alakban felírt *Galilei*-transzformációktól, hogy először is a sík pontjainak koordinátáit most nem t és x jelöli, ahogy általában szokás (az x koordináta veszi át a t idő szerepét, pedig az o egyenesen mért x abcisszáét); másodsor mozgásnak tekintjük az

$$\begin{aligned}x' &= x + a \\y' &= y + b\end{aligned}\quad (11.1a)$$

párhuzamos eltolásokat is; ezek az időszámítás és az o egyenes alappontjának változtatását fejezik ki. Ennek megfelelően a *téridő-geometria az $\{x, y\}$ koordinátasík alakzatainak olyan tulajdonságait vizsgálja, amelyek megmaradnak az*

$$\boxed{x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}x - \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}y + a} \quad (12.1)$$

$$\boxed{y' = -\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}y + b} \quad (12.1')$$

mozgások után; itt v , a és b a mozgás paraméterei. Az (11.1) transzformációk abban különböznek a (11.7) transzformációktól, hogy a sík pontjainak koordinátáit most x és y jelöli (x lesz az idő, z pedig az o egyenesen mozgó pont abcisszája), és abban is, hogy így a mozgások közé soroljuk a (11.1a) párhuzamos eltolásokat is, amelyekben az időmérés kezdetének és az o

*A „pszeudoeuklideszi” geometria terminust az indokolja, hogy a téridő geometria nagyon hasonlít az euklideszi geometriához. Az euklideszi geometria tényei néha egészen sajátosan torzulnak a téridő geometriában (erről később még lesz szó).

egyenes origójának megváltoztatása fejeződik ki. Ebben a paragrafusban rövid áttekintést adunk a téridő-geometriáról, de az itteni geometriai tényeknek a relativisztikus mechanikában való értelmezéséről ezúttal szinte teljesen le kell mondanunk.

A téridő-geometriában az (x, y) pontkoordináták mellett az (X, Y) pontkoordináták is használatosak, e két koordinátapárt az

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$$

vagy

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$$

összefüggések kapcsolják össze (1. ábra). Adjuk össze az (1) egyenleteket, illetve vonjuk ki őket egymásból, s ezzel rögtön megkapjuk a téridő-sík mozgásait X, Y koordinátákkal kifejezve:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}X' &= \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{X+Y}{\sqrt{2}} + \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{X-Y}{\sqrt{2}} + a + b \\ \sqrt{2}Y' &= \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{X+Y}{\sqrt{2}} + \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{X-Y}{\sqrt{2}} + a - b \end{aligned}$$

avagy

$$\boxed{X' = \lambda X + A} \quad (12.1a)$$

$$\boxed{Y' = \frac{1}{\lambda} Y + B} \quad (12.1a')$$

ahol

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} = \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{1}{\lambda} &= \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \\ A &= \frac{a+b}{\sqrt{2}} \quad B = \frac{a-b}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

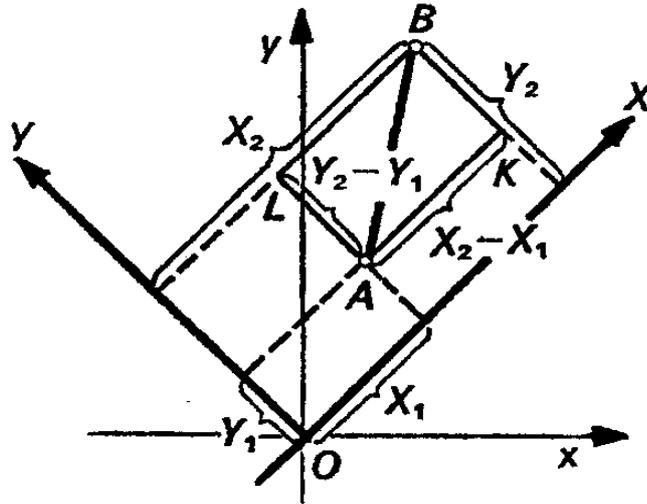
a leképzés paraméterei. Az (1a) mozgás összetehető egy

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda X \\ Y_1 &= \frac{1}{\lambda} Y \end{aligned} \quad (12.3a)$$

alakú transzformációból — ez egy OY tengelyű, λ arányú és egy OX tengelyű, $\frac{1}{\lambda}$ arányú affinitás kombinációja* (lásd a 2. ábrán), ahol $\lambda < 1 < \frac{1}{\lambda}$ — és egy

$$\begin{aligned} X' &= X_1 + A \\ Y' &= Y_1 + B \end{aligned} \quad (12.3b)$$

**Az Oy tengelyű λ arányú nyújtás a síknak az OY tengelytől X távolságra fekvő $A(X, Y)$ pontját az A pontból az OY egyenesre bocsátott AP merőlegesnek $A_1(\lambda X, Y)$ pontjába viszi. A_1 az OY tengelytől λX távolságra van.



1. ábra.

párhuzamos eltolásból. A (3.a) transzformációk **forogás szerepét töl-
tik be a téridő-geometriában;**** az $\{X, Y\}$ euklideszi koordinátasík-
nak ezeket a leképezéseit hiperbolikus elforgatásoknak nevezik (hogy miért,
arról majd később). A (3.a) az $\{x, y\}$ koordinátákban az

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}x - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}y \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}x + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}y \end{aligned} \quad (12.3)$$

összefüggések adják meg [v.ö. a Lorentz-transzformációkat kifejező (11.7)
képletekkel.]

$$d_{AB} = \sqrt{|(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)|} \quad (6.6)$$

.....Ha az Ox tengelynek a mechanikában az időtengely felel meg, az Oy pedig az o történt események helyének jellemzésére való tengely, akkor az elsőfajú szakaszok két végpontja olyan eseményeknek felel meg, amelyek egy alkalmasan választott (Einstein relativitás elméletének szerint vett) inerciarendszerben egy helyütt játszódnak le és a szakasz hossza a vizsgált eseményeket elválasztó időin-
tervallummal egyezik meg. Másodrendű szakaszhoz is választhatunk egy olyan inerciarendszert, hogy a szakasz végpontjai egyidejű eseményeknek feleljenek meg; ekkor a szakasz téridőbeli hossza az o egyenes megfelelő pontjainak tér-
beli távolságával egyezik meg. Úgy vehetjük tehát, hogy az elsőfajú szaka-
szok hosszát időegységek (szekundumok) mérik, a másodfajú szakaszokét pedig
hosszúságegységek (centiméterek). A téridő-geometria elsőfajú egyeneseit en-
nek megfelelően gyakran időszerű egyeneseknek a másodfajú egyeneseket pedig
téryszerű egyeneseknek mondjuk.

†** Kiemelés tőlem . A szerző.

.....A téridő-geometriában egy Q középpontú és CD sugarú kört (CD itt első vagy másodfajú szakasz) kézenfekvő olyan M pontok halmazaként definiálni, amelyekre a QM szakasz hossza egyenlő a CD szakasz hosszúságával. Állapodjunk meg abban, hogy a Q középpont koordinátáit az $\{X, Y\}$ rendszerben (A, B) -vel, az $\{x, y\}$ rendszerben pedig (a, b) -vel fogjuk jelölni; a CD szakasz

végpontjainak koordinátái legyenek (X_1, Y_1) és (X_2, Y_2) , illetve (x_1, y_1) és (x_2, y_2) . A

$$2(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) = (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2$$

mennyiséget (ez pozitív is, negatív is lehet!) a körsugár négyzetének nevezüjük és $\pm r^2$ -el jelöljük ($r > 0$). Legyen az S kör középpontja Q , sugarának négyzete $\pm r^2$; e kör egyenlete

$$2(X - A)(Y - B) = \pm r^2 \quad (12.6)$$

illetve

$$(x - a)^2 - (y - b)^2 = \pm r^2 \quad (12.6a)$$

[vö. az euklideszi köregyenlettel, lásd 27. oldalon az 1.2 képletet]. A második egyenletet átalakíthatjuk:

$$x^2 - y^2 + 2px + 2qy + f = 0 \quad (12.6')$$

ahol

$$p = -a, \quad q = b, \quad f = a^2 - b^2 \mp r^2$$

Egyebek között, az origó középpontú kör egyenlete a téridő-geometriában

$$XY = konst. \quad (12.7)$$

illetve

$$x^2 - y^2 = konst. \quad (12.7a)$$

A (6) vagy a (6a) egyenletű kör a közös euklideszi geometria szempontjából egy hiperbola, amelynek a középponton átmenő egyenesek az asszimptotái (7. ábra). A 7. ábra egy közös Q középpontú, $+r$, illetve $-r$ sugárnégyzetű elsőfajú S és másodfajú \bar{S} kört ábrázol; az ilyen köröket *konjugált köröknek* nevezzük. A QU és a QV kitüntetett egyenes által alkotott „tengelykereszt” olyan pontokból áll, amelyek Q -tól nulla távolságra vannak., ezt a ponthalmazt nulladfajú körnek (néha *nullkörnek*) is nevezik. Nem nehéz belátni, hogy a téridősík bármely három pontján át vagy egyetlen (első-, másod- vagy nulladfajú) egyenes, vagy (első-, másod- vagy nulladfajú) kör fektethető.

A téridősík köre az euklideszi síkon szemlélve hiperbola, innen a (3a), illetve a (3) transzformációk elnevezése: hiperbolikus elforgatásoknak mondják őket,.....”

([20] I.M: JAGLOM: Galillei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria. 274-285 .o. Budapest, Gondolat. 1985.)

6.2. Argumentumok (sebességek) összeadása

6.2.1. Kétdimenziós komplex számok

A fejezet elején és már korábban is említett három számrendszer fontosabb ismertetőjét az alábbi idézet tartalmazza:

„C. A síkgeometriák számmodelljei

...Az eddigi konstrukciókat ki lehet terjeszteni. A matematika a komplex számokon kívül ismer más számrendszereket is,* például az ún. „duális számokat” és a „hiperbolikus komplex számokat”. A duális számokat az olyan $z = x + \varepsilon y$ kifejezéseként definiáljuk, amelyekben x és y valós szám, az ε „duális egység” pedig eleget tesz az $\varepsilon^2 = 0$ egyenletnek; ez a képzetes egységhez hasonló duális egység persze „különleges” szám, semmiképp sem sorolható a közönséges (valós) számokhoz. A hiperbolikus komplex e számon a $z = x + ey$ alakú kifejezéseket értjük, ahol az $e^2 = +1$ feltételt (e szintén „különleges fajta” szám, nem valós).

A „duális számokat” először egy német géométer, *Eduárd Study* vizsgálta, ezért „Study-féle duális számokként” emlegetik őket; a hiperbolikus komplex számokat Study kortársa, William Clifford (1845-1879) angol matematikus vezette be.

A Study-féle és a hiperbolikus komplex számok összeadása és kivonása ugyanúgy megy, mint a komplex számoké:

$$(x + \varepsilon y) \pm (x_1 + \varepsilon y_1) = (x + x_1) + \varepsilon(y + y_1) \quad ((C.22'))$$

$$(x + ey) \pm (x_1 + ey_1) = (x + x_1) + e(y + y_1) \quad ((C.22''))$$

a szorzás művelete pedig

$$\begin{aligned} (x + \varepsilon y)(x_1 + \varepsilon y_1) &= xx_1 + \varepsilon(xy_1) + \varepsilon(x_1y) + \varepsilon^2(yy_1) \\ &= xx_1 + \varepsilon(xy_1 + x_1y) \end{aligned} \quad ((C.23'))$$

$$\begin{aligned} (x + ey)(x_1 + ey_1) &= xx_1 + e(xy_1) + e(x_1y) + e^2(yy_1) \\ &= (xx_1 + yy_1) + e(xy_1 + x_1y) \end{aligned} \quad ((C.23''))$$

[vö. az $(x + \mathbf{i}y)(x_1 + \mathbf{i}y_1) = (xx_1 - yy_1) + \mathbf{i}(xy_1 + x_1y)$ egyenlőséggel]. Ha tehát a $z = x + \varepsilon y$ és a $z = x + ey$ alakú számokra is bevezetjük az $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ jelölést, akkor — éppúgy mint a komplex számok esetében —:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z \pm z_1) &= \operatorname{Re} z \pm \operatorname{Re} z_1 \\ \operatorname{Im}(z \pm z_1) &= \operatorname{Im} z \pm \operatorname{Im} z_1 \end{aligned} \quad ((C.5))$$

És mind a három számtípusra (a komplex, a Study-féle és a hiperbolikus komplex számokra is) áll, hogy

$$\operatorname{Im}(z z_1) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z \quad ((C.24))$$

*Ezen más számrendszerek közül, a legközelebbeket vesszük figyelembe, amelyekkel az azonos alapvető műveletek elvégezhetők. Egy azonban kimarad épp nagy jelentősége miatt az elliptikus komplex számok.

de a komplex számokra

$$\operatorname{Re}(zz_1) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z_1 \quad ((C.25))$$

a Study számokra

$$\operatorname{Re}(zz_1) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} z_1 \quad ((C.25'))$$

a hiperbólikus számokra

$$\operatorname{Re}(zz_1) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z_1 \quad ((C.25''))$$

Az osztás művelete mind a Study-féle, mind a hiperbolikus komplex számoknál szorosan összefügg a konjugáltképzés szabályával. Ez az operáció mindhárom számtípusra ugyanugy van definiálva:

$$\text{ha } z = x + Iy \text{ akkor } \bar{z} = x - Iy, \text{ ahol } I = \mathbf{i}, \varepsilon \text{ vagy } e \quad ((C.27))$$

(ezt az \mathbf{I} jelölést később is használni fogjuk). Ily módon mind a három számfajtára

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z \quad \text{s} \quad \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z \quad ((C.3a))$$

Két, egymással konjugált szám összege (mind a három típusnál) valós szám. vagyis az összeg olyan \mathbf{z} szám, amelyre $\operatorname{Im} z = 0$ két egymással konjugált szám különbsége pedig „képzetes” szám, vagyis olyan \mathbf{z} szám, amelyre $\operatorname{Re} z = 0$:

$$\mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}} = 2 \operatorname{Re} \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}} = 2 \operatorname{Im} \mathbf{z}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{i}, \varepsilon \text{ vagy } e \quad ((C.27'))$$

A $z = \bar{z}$ feltétel a valós számok jellemzője, a $z = -z$ a képzetes számoké. Ennél is fontosabb, hogy két, egymással konjugált számnak a szorzata mindig valós szám:

$$\begin{aligned} (x + \mathbf{i}y)(x - \mathbf{i}y) &= x^2 + y^2 & ((C.28)) \\ (x + \varepsilon y)(x - \varepsilon y) &= x^2 \\ (x + ey)(x - ey) &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

A $\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}}$ tört értékének meghatározásához ezért elég a $\bar{\mathbf{z}}$ számmal megszorozni a tört számlálóját is, nevezőjét is; az így kapott $\frac{\mathbf{z}_1 \bar{\mathbf{z}}}{\mathbf{z} \bar{\mathbf{z}}}$ tört nevezője már valós, s vele külön-külön oszthatjuk $\operatorname{Re}(\mathbf{z}_1 \bar{\mathbf{z}})$ -t és $\operatorname{Im}(\mathbf{z}_1 \bar{\mathbf{z}})$ -t:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}} &= \frac{x_1 + \mathbf{i}y_1}{x + \mathbf{i}y} = \frac{(x_1 + \mathbf{i}y_1)(x - \mathbf{i}y)}{(x + \mathbf{i}y)(x - \mathbf{i}y)} \\ &= \frac{(xx_1 + yy_1) + \mathbf{i}(xy_1 - x_1y)}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{xx_1 + yy_1}{x^2 + y^2} + \mathbf{i} \frac{xy_1 - x_1y}{x^2 + y^2} \quad ((C.29)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}} &= \frac{x_1 + \varepsilon y_1}{x + \mathbf{i}y} = \frac{(x_1 + \varepsilon y_1)(x_1 - \varepsilon y_1)}{(x + \mathbf{i}y)(x - \mathbf{i}y)} \\
&= \frac{xx_1 + \varepsilon(xy_1 - x_1y)}{x^2} = \\
&= \frac{xx_1}{x^2 + y^2} + \varepsilon \frac{xy_1 - x_1y}{x^2 + y^2} \quad ((C.29'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}} &= \frac{x_1 + ey_1}{x + ey} = \frac{(x_1 + ey_1)(x_1 - ey_1)}{(x + ey)(x - ey)} \\
&= \frac{(xx_1 - yy_1) + e(xy_1 - x_1y)}{x^2 + y^2} = \\
&= \frac{xx_1 - yy_1}{x^2 - y^2} + \mathbf{i} \frac{xy_1 - x_1y}{x^2 - y^2} \quad ((C.29''))
\end{aligned}$$

A (29)-(29'') összefüggésekből az következik, hogy olyan komplex számmal nem lehet osztani, amelyre $x^2 + y^2 = 0$ vagyis nem lehet osztani a nullával ($0 = 0 + \mathbf{i}0$) a Study-féle és a hiperbolikus komplex számok körében azonban már több szám is van ilyen. Nevezetesen nem lehet osztani az olyan Study-féle számokkal, amelyekre $x = 0$, vagyis az $\varepsilon y = (0 + \varepsilon y)$ számokkal. A hiperbolikus számok körében pedig az $(x^2 - y^2) = 0$ [azaz $(x + y)(x - y) = 0$] tulajdonságú számokkal, vagyis az $x + ey$ és az $x - ey$ alakú számokkal.

Tudjuk, hogy (28) első egyenlőségére alapul a komplex szám abszolút értékének vagy modulusának definíciója:

$$|z|^2 = \mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} = x^2 + y^2 \quad \text{ahol } z \geq 0$$

[lásd a (2) képletet]. A $|\mathbf{z}|$ jelölést továbbra is megtartva, erre a mintára a Study-féle és hiperbolikus komplex számokra vonatkozóan is fölírhatjuk, hogy,

$$|\mathbf{z}|^2 = \mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} = x^2 \quad ((C.2a))$$

$$|\mathbf{z}|^2 = \mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} = \pm(x^2 - y^2) \quad ((C.2b))$$

Pontosabban, állapodjunk meg abban, hogy a $z = x + ey$ Study-féle számra

$$|\mathbf{z}| = x \quad ((C.2'))$$

így Study-féle szám modulusa pozitív is lehet, meg negatív is, az $x + ey$ hiperbolikus komplex számra pedig

$$\begin{aligned}
|\mathbf{z}| &= \pm\sqrt{x^2 - y^2} \quad \text{ha } |x| \geq |y| \\
|\mathbf{z}| &= \pm\sqrt{y^2 - x^2} \quad \text{ha } |y| \geq |x| \quad ((C.2''))
\end{aligned}$$

Célszerű még feltenni, hogy a hiperbolikus komplex számok modulusának előjele az x és y szám közül az abszolút értékben nagyobbak az előjellel azonos (így a hiperbolikus komplex számok abszolút értéke is lehet negatív!)

Ezek után azt mondhatjuk el, hogy e három számrendszerben (a komplex, a Study-féle és a hiperbolikus komplex számok körében) csak a nulla modulusú ($z = 0$) számokkal nem szabad osztani. Az ilyen számokat nullosztóknak is nevezzük, mert mindegyikéhez létezik olyan, nullától különböző \mathbf{z} szám, hogy $\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}_1 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 \cdot (a + \mathbf{i}b) &= 0; & (\varepsilon y)(\varepsilon b) &= 0 \\ (x + \varepsilon x)(a - \varepsilon a) &= (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)(xa) = (1 - \varepsilon^2)(xa) = 0 \end{aligned}$$

Legyen \mathbf{z} nem nulla modulusú szám: $\mathbf{z} = r \neq 0$.

A $\mathbf{z} = x + \varepsilon y$, illetve $\mathbf{z} = x + \varepsilon y$ kifejezésből emeljük ki $|\mathbf{z}| = r$ -t:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{x} + \varepsilon y = r \left(\frac{x}{r} + \varepsilon \frac{y}{r} \right) \\ \mathbf{z} &= \mathbf{x} + \varepsilon y = r \left(\frac{x}{r} + e \frac{y}{r} \right) \end{aligned}$$

A $\mathbf{z} = x + \varepsilon y$ Study-féle szám $|\mathbf{z}| = r$ modulusa — mint tudjuk — x -szel egyenlő; következésképp felírhatjuk, hogy

$$\mathbf{z} = x + \varepsilon y = r \left(1 + \varepsilon \frac{z}{r} \right)$$

Az $\frac{y}{r} = r = \varphi$ hányadost a $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \varepsilon y$ Study-féle szám argumentumának nevezzük és $\text{Arg } \mathbf{z}$ -vel jelöljük; így módon minden nem nulla abszolút értékű Study-féle számot föl lehet írni:

$$\mathbf{z} = x + \varepsilon y = r(1 + \varepsilon \varphi) \quad ((C.1'))$$

tehát az

$$r = |\mathbf{z}| = \sqrt{x^2 - y^2} \quad ((C.2'' a))$$

képlettel definiálhatjuk(ahol r előjele ugyanaz, mint x -é). Így alakban, ahol $r = |\mathbf{z}|$ és $\varphi = \text{Arg } \mathbf{z}$, és e \mathbf{z} szám abszolút értékét és argumentumát a

$$\mathbf{z} = x = \text{Re } \mathbf{z} \quad ((C.2'))$$

illetve

$$\text{Arg } \mathbf{z} = \frac{y}{x} = \frac{y}{|\mathbf{z}|} = \frac{\text{Im } \mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} = \frac{\text{Im } \mathbf{z}}{\text{Re } |\mathbf{z}|} \quad ((C.4'))$$

összefüggések adják.

A $\mathbf{z} = x + \varepsilon y$ hiperbolikus komplex számnál külön kell választanunk az :

$$|x| > |y| \text{ és az } |x| < |y| \text{ esetet. .}$$

Az $|x| > |y|$ esetben a \mathbf{z} szám r modulusát :

$$r = |\mathbf{z}| = \pm \sqrt{x^2 - y^2} \quad ((C.2'' b))$$

képlettel definiálhatjuk(ahol r előjele ugyanaz mint, mint az x -é). Így

$$\left(\frac{x}{r} \right)^2 - \left(\frac{y}{r} \right)^2 = \frac{x^2 - y^2}{r^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = 1$$

következésképp létezik olyan szám (amelyet szöggként lehet értelmezni a téridő-geometriában, lásd a 192. oldalt), amelyre

$$\begin{aligned}\cosh \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{\operatorname{Re} \mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} \\ \sinh \varphi &= \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Im} \mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} \\ \tanh \varphi &= \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{Im} \mathbf{z}}{\operatorname{Re} \mathbf{z}}\end{aligned}\quad ((C.4'' a))$$

(persze itt $\cosh \varphi = \frac{x}{y} > 0$; (lásd 192.oldalt). Ha pedig $|x| < |y|$, akkor

$$r = |z| = \sqrt{y^2 - x^2} \quad ((C.2'' a))$$

ahol r előjele megegyezik y előjével); ezért

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 - x^2}{r^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^2 - x^2} = 1$$

Ekkor létezik olyan φ szám, amelyre

$$\begin{aligned}\sinh \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{\operatorname{Re} \mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} \\ \cosh \varphi &= \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Im} \mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} \\ \tanh \varphi &= \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{Im} \mathbf{z}}{\operatorname{Re} \mathbf{z}}\end{aligned}\quad ((C.4'' b))$$

($\cosh \varphi = \frac{y}{r}$ itt is nagyobb mint nulla). A (4'' a–b) összefüggésekkel meghatározott φ számot a \mathbf{z} hiperbolikus komplex szám argumentumának nevezzük és $\operatorname{Arg} \mathbf{z}$ -vel jelöljük. Minden nem nulla abszolút értékű $z = x + ey$ hiperbolikus komplex szám felírható tehát

$$\begin{aligned}(a) \mathbf{z} &= r(\cosh \varphi + e \sinh \varphi \text{ vagy}) \\ (b) \mathbf{z} &= r(\sinh \varphi + e \cosh \varphi)\end{aligned}\quad ((C.1'))$$

alakban, ahol szám modulusát, a (2'') összefüggésekkel, argumentumát, $\operatorname{Arg} \mathbf{z}$ -t pedig a (4'' a-b) összefüggésekkel határozzuk meg. $|\mathbf{z}|$ előjele (1'' a) alakú számoknál az x előjével egyezik meg, (1'' b) alakú számoknál viszont az y -ével. A (1'' a) alakú számokat (az olyan $x + ey$ számokat, amelyekre $|x| > |y|$ ezentúl elsőfajú hiperbolikus komplex számoknak fogjuk nevezni, a (1'' b) alakúakat pedig (amelyekre $|x| > |y|$) másodfajú hiperbolikus komplex számoknak.

Megjegyezzük még, hogy ha

$$\mathbf{z} = x + \varepsilon y = r(1 + \varepsilon \varphi)$$

akkor

$$\bar{\mathbf{z}} = x + \varepsilon y = r(1 + \varepsilon(-\varphi))$$

s ezért a Study-féle számokra is igazak a

$$|\mathbf{z}| = |\bar{\mathbf{z}}|, \quad \text{Arg } \bar{\mathbf{z}} = -\text{Arg } \mathbf{z} \quad ((\text{C.3b}))$$

összefüggések. Ezek a képletek elsőfajú hiperbolikus komplex számokra is érvényben maradnak, mivel, ha

$$\mathbf{z} = x + ey = \varphi$$

akkor

$$\bar{\mathbf{z}} = x + ey = r(\cosh(-\varphi) + e \sinh(-\varphi))$$

[vö. a (10.6-7) összefüggéseivel, lásd a 192.oldalt.] Másodfajú hiperbolikus komplex számokra viszont helyettük a

$$|\bar{\mathbf{z}}| = |\mathbf{z}|, \quad \text{Arg } \bar{\mathbf{z}} = -\text{Arg } \mathbf{z} \quad ((\text{C.3c}))$$

összefüggések érvényesek, mivel ha

$$\mathbf{z} = x + ey = r(\sinh \varphi + e \cosh \varphi)$$

akkor

$$\bar{\mathbf{z}} = x + ey = -r(\sinh(-\varphi) + e \cosh(-\varphi))$$

[lásd ismét a 10.6-7) képleteit] [†]

Most képezzük a $\mathbf{z} = r(1 + \varepsilon\varphi)$ és a $\mathbf{z}_1 = r(1 + \varepsilon\varphi_1)$ Study-féle számok szorzatát:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}\mathbf{z}_1 &= r(1 + \varepsilon\varphi) \cdot r(1 + \varepsilon\varphi_1) = rr_1(1 + \varepsilon\varphi)(1 + \varepsilon\varphi_1) = \\ &= rr_1(1 + \varepsilon\varphi + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi\varphi_1) = rr_1(1 + \varepsilon(\varphi + \varphi_1)) \end{aligned}$$

A Study-féle számokra ily módon teljesülnek a (komplex számoknál megismert)

$$|\mathbf{z}\mathbf{z}_1| = |\mathbf{z}| \cdot |\mathbf{z}_1|, \quad \text{Arg}(\mathbf{z}\mathbf{z}_1) = \text{Arg } \mathbf{z} + \text{Arg } \mathbf{z}_1 \quad ((\text{C.5a}))$$

összefüggések [az (5a) összefüggéseket a komplex számoknál Moivre-formuláknak mondjuk. Ezt az elnevezést a Study-féle számokra vonatkozólag is megtartjuk]. Az (5a) képletből már következnek a

$$\left| \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}_1} \right| = \frac{|\mathbf{z}|}{|\mathbf{z}_1|}, \quad \text{Arg} \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}_1} \right) = \text{Arg } \mathbf{z} - \text{Arg } \mathbf{z}_1 \quad ((\text{C.5.b}))$$

szabályok, vagyis

$$\frac{r(1 + \varepsilon\varphi)}{r_1(1 + \varepsilon\varphi_1)} = \frac{r}{r_1}(1 + \varepsilon(\varphi - \varphi_1))$$

[†]12.9a-b képletek: $\cosh(-\varphi) = \cosh(\varphi)$; $\sinh(-\varphi) = -\sinh(\varphi)$

Éppígy, ha

$$\mathbf{z} = r(\cosh \varphi + e \sinh \varphi) \text{ és } \mathbf{z}_1 = r_1(\cosh \varphi_1 + e \sinh \varphi_1)$$

akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{z}\mathbf{z}_1 &= r(\cosh \varphi + e \sinh \varphi) \cdot r_1(\cosh \varphi_1 + e \sinh \varphi_1) = \\ &= rr_1(\cosh \varphi + e \sinh \varphi) \cdot (\cosh \varphi_1 + e \sinh \varphi_1) = \\ &= rr_1[(\cosh \varphi \cosh \varphi_1 + e \sinh \varphi \sinh \varphi_1) + \\ &\quad + (\cosh \varphi \sinh \varphi_1 + e \sinh \varphi \cosh \varphi_1)] \\ &= rr_1[(\cosh(\varphi + \varphi_1) + e \sinh(\varphi + \varphi_1))] \end{aligned}$$

[vö. a (10.6-7 képletével, lásd 192.oldalt];

ha

$$\mathbf{z} = r(\sinh \varphi + e \cosh \varphi) \text{ és } \mathbf{z}_1 = r_1(\sinh \varphi_1 + e \cosh \varphi_1)$$

akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{z}\mathbf{z}_1 &= r(\sinh \varphi + e \cosh \varphi) \cdot r_1(\sinh \varphi_1 + e \cosh \varphi_1) = \\ &= rr_1(\sinh \varphi + e \cosh \varphi) \cdot (\sinh \varphi_1 + e \cosh \varphi_1) = \\ &= rr_1[(\sinh \varphi \sinh \varphi_1 + e \cosh \varphi \cosh \varphi_1) + \\ &\quad + (\sinh \varphi \cosh \varphi_1 + e \cosh \varphi \sinh \varphi_1)] \\ &= rr_1[(\sinh(\varphi + \varphi_1) + e \cosh(\varphi + \varphi_1))] \end{aligned}$$

végül, ha

$$\mathbf{z} = r(\cosh \varphi + e \sinh \varphi) \text{ és } \mathbf{z}_1 = r_1(\sinh \varphi_1 + e \cosh \varphi_1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}\mathbf{z}_1 &= r(\cosh \varphi + e \sinh \varphi) \cdot r_1(\sinh \varphi_1 + e \cosh \varphi_1) = \\ &= rr_1(\cosh \varphi + e \sinh \varphi) \cdot (\sinh \varphi_1 + e \cosh \varphi_1) = \\ &= rr_1[(\cosh \varphi \sinh \varphi_1 + e \sinh \varphi \cosh \varphi_1) + \\ &\quad + (\cosh \varphi \cosh \varphi_1 + e \sinh \varphi \sinh \varphi_1)] \\ &= rr_1[(\sinh(\varphi + \varphi_1) + e \cosh(\varphi + \varphi_1))] \end{aligned}$$

[lásd ismét a (10.6-7) képleteit]. A hiperbolikus komplex számokra is igazak tehát a Moivere-formulák:

$$|\mathbf{z}\mathbf{z}_1| = |\mathbf{z}| \cdot |\mathbf{z}_1|, \quad \text{Arg}(\mathbf{z}\mathbf{z}_1) = \text{Arg } \mathbf{z} + \text{Arg } \mathbf{z}_1 \quad ((\text{C.5.a}'))$$

de itt gondolnunk kell arra is, hogy két azonos (első-vagy másod-) fajjú hiperbolikus komplex szám szorzata elsőfajú hiperbolikus komplex szám, két különböző fajjú pedig másodfajú.

Az (5a) képletből az is következik, hogy

$$\left| \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}_1} \right| = \frac{|\mathbf{z}|}{|\mathbf{z}_1|}, \quad \text{Arg} \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}_1} \right) = \text{Arg } \mathbf{z} - \text{Arg } \mathbf{z}_1 \quad ((\text{C.5.b}'))$$

és persze most is számításba kell venni, hogy két azonos fajú hiperbolikus komplex szám hányadosa mindig elsőfajú, a különböző fajúké pedig másodfajú hiperbolikus szám:

$$\begin{aligned} \frac{r(\cosh \varphi + e \sinh \varphi)}{r_1(\cosh \varphi_1 + e \sinh \varphi_1)} &= \frac{r(\sinh \varphi + e \cosh \varphi)}{r_1(\sinh \varphi_1 + e \cosh \varphi_1)} = \\ \frac{r}{r_1} &= [\sinh(\varphi - \varphi_1) + e \cosh(\varphi - \varphi_1)] \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \frac{r(\cosh \varphi + e \sinh \varphi)}{r_1(\sinh \varphi_1 + e \cosh \varphi_1)} &= \frac{r(\sinh \varphi + e \cosh \varphi)}{r_1(\cosh \varphi_1 + e \sinh \varphi_1)} = \\ \frac{r}{r_1} &= [\sinh(\varphi - \varphi_1) + e \cosh(\varphi - \varphi_1)] \end{aligned}$$

Végül megjegyezzük, hogy - mint az már az (5), (24) és (25-25''), (29)-(29'') összefüggésekből, valamint a konjugált (26) definíciójából vagy ha szorzásról és osztásról van szó, akkor az (5a-b) és a (3a-c) képletekből következik - mindhárom számtípusra:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{z} + \mathbf{z}_1} &= \overline{\mathbf{z}} + \overline{\mathbf{z}_1}, & \overline{\mathbf{z} - \mathbf{z}_1} &= \overline{\mathbf{z}} - \overline{\mathbf{z}_1} \\ \overline{\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}_1} &= \overline{\mathbf{z}} \cdot \overline{\mathbf{z}_1}, & \left(\frac{\overline{\mathbf{z}}}{\overline{\mathbf{z}_1}} \right) &= \frac{\overline{\mathbf{z}}}{\overline{\mathbf{z}_1}} \end{aligned} \quad ((C.6))$$

Arra még fölhevítjük a figyelmet, hogy a Study-féle számok körében a valós számok argumentuma nulla, a képzetes számoknak pedig nem létezik argumentumuk; a hiperbolikus komplex számok körében a valós számokra és a képzetes számokra nézve is $Arg z=0$ (valós számok azonban elsőfajú hiperbolikus komplex számok, a képzetes számok másodfajúak).

([21] I.M. Jaglom:Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria. 402—410.o. Gondolat Kiadó, Budapest, 1985.)

Ez az idézet a három számrendszerrel megmutatja, hogy a *GALILEI, EUKLIDESZ és a MINKOWSKI-LORENTZ* traszformációk egyaránt használhatók az inerciarendszerek közti adattranszformációra, –természetesen eltérő végeredménnyel– és ez azért lehetséges, mert ezen geometriákhoz tartozó számrendszerek mindegyike a tetszőleges \mathbf{P} ponthoz húzott \mathbf{p} vektor x tengellyel bezárt szöge —argumentuma: az adott \mathbf{P} pont sebességének abszolút értéke — ugyanazon a módon adja meg két vektor :

1. A két koordináta-rendszer origóját összekötő vektor, argumentumának valamint
2. Az egyik koordináta-rendszerben adott \mathbf{P} pont vektora argumentumának

eredő összegét mind a három számrendszerben, **ami egyben az eredő sebesség is**, azaz a *Moirre-formula* mindhárom számrendszerben érvényes. És itt azonnal le kell szögezni, hogy ezen három traszformáció nagy hiányossága, hogy csak a sebességek abszolút értékét veszi figyelembe, jöllehet a sebesség vektormennyiség. Ez csak azért nem merült fel az *Einstein-féle relativitás elméletben*, mivel *Einstein* csak a párhuzamos sebességű inercia rendszereket vette figyelembe.** !

**A későbbiekben ezt a hiányosságot korrigálták, amikor bevezették az α szöveget bezáró megfigyelés fogalmát. Ennek egyik fontos formulája a $\pi/2$ szögből való megfigyelés.

6.2.2. Sebességek összeadása

Galilei geometria-Study számok.

A *Galilei geometriához* tartozó *Study számok* ugyanúgy komplex számok mint az általánosan ismert komplex számok, azzal a különbséggel, hogy a képzetes értéknek csak az első hatványa létezik az összes többi hatvány zérussal egyenlő. Továbbá a szám abszolút értéke megegyezik a valós résszel:

$$\mathbf{s}_G = |\mathbf{s}_{Gv}| + \mathbf{i}\mathbf{s}_{Gk}$$

Ez téridő leírásban:

$$\mathbf{s}_G = t + \mathbf{i}x$$

Ennek egységvektora:

$$\mathbf{s}_{Ge} = \frac{\mathbf{s}_G}{|\mathbf{s}_G|} = 1 + \mathbf{i}\frac{x}{t}$$

Azaz a *Galilei* egységvektor:

$$\mathbf{s}_{Ge} = 1 + \mathbf{i}v$$

Mivel a *Galilei* geometriában a vektorok összeadása:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathbf{a} + \operatorname{Re} \mathbf{b} &= \operatorname{Re} \mathbf{c} \\ \operatorname{Im} \mathbf{a} + \operatorname{Im} \mathbf{b} &= \operatorname{Im} \mathbf{c} \end{aligned}$$

Tehát a sebességek összeadása a *Galilei* geometriában :

$$\boxed{\mathbf{v}_{Ge} = \mathbf{v}_{Ga} + \mathbf{v}_{Gb}} \quad (6.7)$$

Euklidesz geometria-komplex számok.

Az *Euklidesz*-i geometriában a megfelelő komplex vektor:

$$\mathbf{s}_E = \mathbf{s}_{Ev} + \mathbf{s}_{Ek}$$

Ennek abszolút értéke:

$$|\mathbf{s}_E| = \sqrt{\mathbf{s}_{Ev}^2 + \mathbf{s}_{Ek}^2}$$

Ennek egységvektora:

$$\frac{\mathbf{s}_E}{|\mathbf{s}_E|} = \frac{\mathbf{s}_{Ev}}{\sqrt{\mathbf{s}_{Ev}^2 + \mathbf{s}_{Ek}^2}} + \mathbf{i} \frac{\mathbf{s}_{Ek}}{\sqrt{\mathbf{s}_{Ev}^2 + \mathbf{s}_{Ek}^2}}$$

Ennek sebessége:

$$v = \tan \alpha = \frac{\mathbf{s}_{Ek}}{\mathbf{s}_{Ev}}$$

Két vektor sebességének összeadása, megegyezik a két szög összeadásával:

$$\tan(\gamma) = \tan(\alpha + \beta)$$

$$\tan(\gamma) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

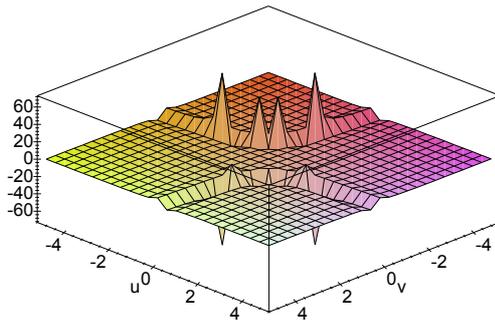
Ha

$$\tan(\gamma) = w \quad \tan(\alpha) = v; \quad \tan(\beta) = u$$

akkor a sebességek összeadása az *Euklideszi geometriában*, ha $c_0 \equiv 1$

$$\boxed{w = \frac{v \pm u}{1 \mp vu}} \quad (6.8)$$

$$\boxed{w = \frac{v \pm u}{1 \mp vu}}$$



Euklidesz sebességösszeadás

Minkowski geometria-hiperbolikus komplex számok.

A Minkowski geometriában a megfelelő komplex vektor:

$$\mathbf{s}_M = \mathbf{s}_{Mv} + \mathbf{s}_{Mk}$$

Ennek abszolút értéke:

$$|\mathbf{s}_M| = \sqrt{\mathbf{s}_{Mv}^2 + \mathbf{s}_{Mk}^2}$$

Ennek egységvektora:

$$\frac{\mathbf{s}_M}{|\mathbf{s}_M|} = \frac{\mathbf{s}_{Mv}}{\sqrt{\mathbf{s}_{Mv}^2 + \mathbf{s}_{Mk}^2}} + \mathbf{i} \frac{\mathbf{s}_{Mk}}{\sqrt{\mathbf{s}_{Mv}^2 + \mathbf{s}_{Mk}^2}}$$

Ennek sebessége:

$$v = \tanh \alpha = \frac{\mathbf{s}_{Mk}}{\mathbf{s}_{Mv}}$$

Két sebességének összeadása, megegyezik a két hiperbolikus szög összeadásával:

$$\tanh(\gamma) = \tanh(\alpha + \beta)$$

$$\tanh(\gamma) = \frac{\tanh(\alpha) \pm \tanh(\beta)}{1 \pm \tanh(\alpha) \tanh(\beta)}$$

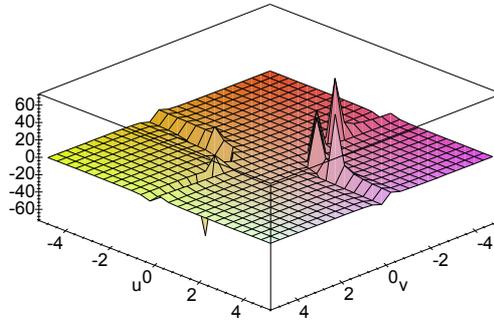
Ha

$$\tanh(\gamma) = w \quad \tanh(\alpha) = v; \quad \tanh(\beta) = u$$

akkor, a sebességek összeadása a *Minkowski geometriában* ha $c_0 \equiv 1$

$$w = \frac{v \pm u}{1 \pm vu} \tag{6.9}$$

$$w = \frac{v \pm u}{1 \pm vu}$$



Minkowski sebességösszeadás

6.3. Forgatási transzformációk

A forgatási transzformációk, a hozzájuk kapcsolódó komplex számok körében úgy értelmezhetők, mint egy vektor \mathbf{S}_1 (amely fizikailag „téryszerű és időszerű” komponensekből áll és értelemszerűen a \mathbf{K}_1 saját koordináta rendszer „ ct_1 valamint x_1 ” tengelyeken mért adataival jellemzett \mathbf{P}_1 pont mozgását írja le, a forgatás során).

A „ v_v ” sebességgel mozgó \mathbf{K}_2 koordináta-rendszerben az \mathbf{S}_2 vektor nem más mint, \mathbf{s}_e -vel történő szorzása az aktuális \mathbf{P}_1 -hez tartozó \mathbf{S}_1 (transzformálni kívánt) vektornak. Ez az egységvektor nem más mint a két inerciarendszert téridő-síkot jellemző komplex sebességvektor, amely a \mathbf{K}_2 síkjában fekvő nyugvónak tekintett \mathbf{K}_1 origóját a \mathbf{K}_2 origójával összekötő \mathbf{s}_{12} vektor. **Alapvetően fontos, hogy a fenti transzformáció szimmetrikus transzformáció.**

A fentiek alapján a transzformáló vektor kiszámítása általánosan, a geometriai rendszertől függetlenül:

$$\mathbf{s}_e = \frac{\mathbf{s}_{12}}{|\mathbf{s}_{12}|}$$

(Itt figyelembe kell venni, hogy minden inerciális koordináta-rendszer, párhuzamos eltolásokkal fedésbe hozható.)

Az így meghatározott három transzformáló egységvektor segítségével könnyen kiszámíthatók a \mathbf{K}_1 rendszerhez képest „ v ” sebességgel haladó \mathbf{K}_2 koordináta-rendszerbeli „ t_2 és x_2 ” paraméterek. Legyen a \mathbf{K}_1 rendszer adott pontjához tartozó komplex téridő vektor:

$$\mathbf{S}_1 = ct_1 + x_1 \quad (6.10)$$

akkor

$$\mathbf{S}_{2t} = \mathbf{s}_e * \mathbf{s}_1 \quad (6.11)$$

Az így leírt transzformáció mindhárom geometriához tartozó komplex számrendszerben elvégezhető az alábbiak szerint:

6.3.1. GALILEI geometria - Study számok

$$\boxed{\text{képzetes egysége} = \mathbf{i}^2 = 0}$$

K_{G2} origójának K_{G1} -ben megadott komplex téridő vektora:

$$\mathbf{S}_1 = cT_{21} + \mathbf{i}^2 X_{21}$$

A fenti komplex téridő vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{S}_{21}| = cT_{21}$$

A komplex transzformáló vektor:

$$\mathbf{s}_{tG} = 1 + \mathbf{i}X_{21}/cT_{21} = 1 + \mathbf{i}v_2/c \quad (6.12)$$

A kétdimenziós komplex vektortranszformáció:

A transzformálandó vektor:

$$\mathbf{s}_2 = ct_2 + \mathbf{i}x_2$$

A transzformáló vektorszorzás:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{tG} &= \mathbf{s}_2 * \mathbf{s}_{eG} \\ \mathbf{S}_{tG} &= (ct_2 + \mathbf{i}x_2) * (1 + \mathbf{i}v_2/c) \end{aligned}$$

Igy a transzformált - elforgatott vektor:

$$\mathbf{S}_{tG} = ct_2 + \mathbf{i}(x_2 + v_2 t_2) \quad (6.13)$$

Innen a tér és idő komponensek transzformáló összefüggése:

GALILEI transzformáció:

$$\begin{aligned} \boxed{t_1 = t_2} \\ \boxed{x_1 = x_2 + v_2 t_2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

6.3.2. **MINKOWSKI geometria-hiperbolikus komplex számok**

$$\boxed{\text{a képzetes egység : } \mathbf{i}^2 = 1}$$

K_{M2} origójának K_{M1} -ben megadott komplex téridő vektora:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{12} &= c_0 T_{12} + \mathbf{i} X_{12} & c_0 T_{12} &\not\cong X_{12} \\ \mathbf{S}_{12} &= X_0 + \mathbf{i} c_0 T_{12} & X_{12} &\not\cong c_0 T_{12} \end{aligned}$$

Komplex téridő-vektor abszolút értékei:

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}_{Mtx}| &= (c^2 T_{12}^2 - X_{12}^2)^{1/2} = c T_{12} (1 - v_2^2/c^2)^{1/2} \\ c T_{12} &> X_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}_{Mxt}| &= (X_{12}^2 - c^2 T_{12}^2)^{1/2} = c T_{12} (1 - c^2/v_2^2)^{1/2} \\ c T_{12} &< X_{12} \end{aligned}$$

Komplex transzformáló vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{Mtx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} + \mathbf{i} \frac{v_0/c}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \\ \mathbf{s}_{Mxt} &= \frac{c/v_0}{\sqrt{v_0^2/c^2 - 1}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{v_0^2/c^2 - 1}} \end{aligned}$$

A transzformáló vektorszorzás:

$$\mathbf{S}_{tM} = \mathbf{s} * \mathbf{s}_{eM} \tag{6.15}$$

Abban az esetben ha $ct > x$, a transzformált elforgatott vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{tM} &= (ct_2 + \mathbf{i}x_2) \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{0x}^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_{0x}/c_0}{\sqrt{1 - v_{0x}^2/c_0^2}} \right) \\ \mathbf{S}_{tM} &= \frac{t_2 + x_2 v_{0x}/c_0^2}{\sqrt{1 - v_{0x}^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{x_2 + v_{0x}/c_0}{\sqrt{1 - v_{0x}^2/c_0^2}} \end{aligned}$$

Lorentz-Minkowski transzformáció: $ct > x$

$$\begin{aligned} \boxed{t_1} &= \frac{t_2 + x_2 v_{0x}/c_0^2}{\sqrt{1 - v_{0x}^2/c_0^2}} \\ \boxed{x_1} &= \frac{x_2 + v_{0x}/c_0}{\sqrt{1 - v_{0x}^2/c_0^2}} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Ezek a klasszikusnak számító Lorentz - transzformáció formulái.

A nem klasszikus, fénysebességnél nagyobb sebesség esetén, azaz, amikor $x > ct$, a transzformált forgatott vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{tM} &= (x_2 + \mathbf{i}c_0t_2) \left(\frac{c_0/v_1}{\sqrt{v_1^2/c_0^2 - 1}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{v_1^2/c_0^2 - 1}} \right) \\ \mathbf{S}_{tM} &= \frac{x_2c_0/v_1 + t_2c_0}{\sqrt{v_1^2/c_0^2 - 1}} + \mathbf{i} \frac{x_2 + t_2c_0^2/v_1}{\sqrt{v_1^2/c_0^2 - 1}} \end{aligned}$$

Lorentz-Minkowski transzformáció: ha $ct < x$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{x_2c_0/v_1 + t_2c_0}{\sqrt{v_1^2/c_0^2 - 1}} \\ x_1 &= \frac{x_2 + t_2c_0^2/v_1}{\sqrt{v_1^2/c_0^2 - 1}} \end{aligned} \tag{6.17}$$

Ezek a nemklasszikusnak számító Lorentz - transzformáció formulái, a tér - idő komponensek transzformáló összefüggése. Nagyon fontos ismételt felhívni itt a figyelmet arra, hogy a fenti transzformációs formula nem más mint a Lorentz transzformáció abban az esetben ha $v > c$ vagyis a speciális relativitás elmélet szerinti nem létező esetre, vagy másképpen a Lorentz transzformáció kibővítése a fénysebességnél nagyobb sebességek esetére.

Összefoglalva a Lorentz-Minkowski transzformáció három részre bontja a téridő síkot:

- A „hatás” terjedési sebessége kisebb a fénysebességnél:

$$v < c$$

- A „hatás” terjedési sebessége nagyobb a fénysebességnél:

$$v > c$$

- A 45° -os egyenesen lévő pontok között a „hatás” téridőbeli sebessége végtelen. Ezzel a sebességgel terjed az egyetlen frekvenciából álló fényhullám)

6.3.3. **EUKLÍDESZ geometria - komplex számok**

$$\boxed{\text{A képzetes egység: } \mathbf{i}^2 = -1}$$

K_E2 origójának K_E1 -ben megadott komplex téridő vektora:

$$\mathbf{S}_0 = c_0 T_0 + \mathbf{i} X_0$$

Komplex téridő vektor abszolút értéke:

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}_0| &= (c_0^2 T_0^2 + X_0^2)^{1/2} = \\ &= c_0 T_0 (1 + v_{0x}^2/c_0^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Komplex transzformáló vektor:

$$\mathbf{S}_{Et_x} = \frac{1}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c^2}} + \mathbf{i} \frac{v_{0x}/c}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c^2}}$$

A transzformálódó vektor:

$$\mathbf{S}_2 = c_0 t_2 + \mathbf{i} x_2$$

A transzformáló vektorszorzás:

$$\mathbf{S}_{tE} = \mathbf{S} * \mathbf{S}_{Et_x}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{tE} &= (c_0 t_2 + \mathbf{i} x_2) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_{0x}/c_0}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}} \right) \\ \mathbf{S}_{tE} &= \frac{t_2 - x_2 v_{0x}/c_0^2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{x_2 + t_2 v_{0x}}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} t_1 &= \frac{t_2 - x_2 v_{0x}/c_0^2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}} \\ x_1 &= \frac{x_2 + t_2 v_{0x}}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}} \end{aligned}} \quad (6.18)$$

A továbbiakban ezeket a formulákat **Euklidesz transzformáció**nak fogom nevezni és ki fog derülni, ugyanúgy lehet őket használni mint *Galilei* és a *Minkovszki-Lorentz* transzformációkat.

A három levezetésből látható a *Galilei* és *Lorentz* transzformációk nem különleges fizikai előfeltételek következményei, hanem pusztán azért különböznek, mivel a képzetes egységvektor négyzete összhangban a matematikai megfeleltetéssel három geometriához kapcsolódó számrendszerben eltérő definitív értékkel rendelkezik

6.4. Elfajult négydimenziós transzformáció

MICHELSON-MORLEY INTERFEROMÉTER

Az elfajult négydimenziós transzformáció : ebben lehet az interferométer négydimenziós fényvektorainak hossz változását elemezni.

A Michelson-Morley interferométerben a fényvektorok ténylegesen négydimenziós térben haladnak, a kísérlet fizikai kerete két térdimenzió. A fizikai jelenség két fényhullám szuperpozíciója illetve interferenciája. A fény mozgása és a kísérleti elrendezés mozgása (ami a Föld mozgásával azonos) az eredeti feltételezés szerint egymással szoros kapcsolatban van. A kísérlet során az osztótükör elmozdulása módosítja a fényvektorok mozgási irányát ennek következtében a fénysugár pályája megváltozik. Azonban ez a változás nem észlelhető, mivel az észleléshez alkalmazott mérési összeállítás, a mérés elemeinek soklépéses beállítása során ez az elmozdulás része a beállításnak, tehát teljesen természetes, hogy az egyébként maximális szimmetriával megépített kísérleti berendezés az elforgatás után ugyanolyan állapotban marad mint a beállítás során került.

Itt külön ki kell térni a Föld mozgására, ami a tükröket a fénytől függetlenül mozgatja, és a terjedő fénysugárra két tükör hat: a Föld mozgására merőleges tüköré valamint az osztótüköré. Azonban az elforgatás a szimmetrikus elrendezés következtében nem változtatja meg a keletkező interferencia képet. Klasszikus számításoknál a Föld mozgására merőlegesen terjedő fényhez hozzáadták a Föld sebességét és így egy egymást kicsiny szöggel keresztező két fénynyalábot kaptak. Ami kettős hullámképet adott a szuperpozíciós-interferencia térben. Egy része interferencia jelenséget eredményezett, a másik része pedig állóhullámokat alkotott. Az elméleti számítások ennek során feltételezve a fény és a mérési elrendezés közti csatolást, a mérés eredményébe beszámították a tükrök egymástól eltérő mozgását, ami a számításban az interferenciakép elmozdulását eredményezte: tévesen. A mérés ezzel ellentétes eredményéből indult ki a téridő geometria, a Minkowski-Lorentz transzformáció megalkotása.

Jóllehet a Michelson-Morley kísérletben, hasonlóan többi kevésbé pontos kísérlethez semmilyen szerepet nem játszott az idő, a mérések statikus jellegűek voltak.

Azonban a félreértelmezett kísérleti eredmények nyomán, a magyarázat új geometria illetve transzformáció kidolgozásához vezetett, amely megszüntette a fény és a mérőberendezés közti csatolást, úgy, hogy a transzformáció részévé tették az időt.*

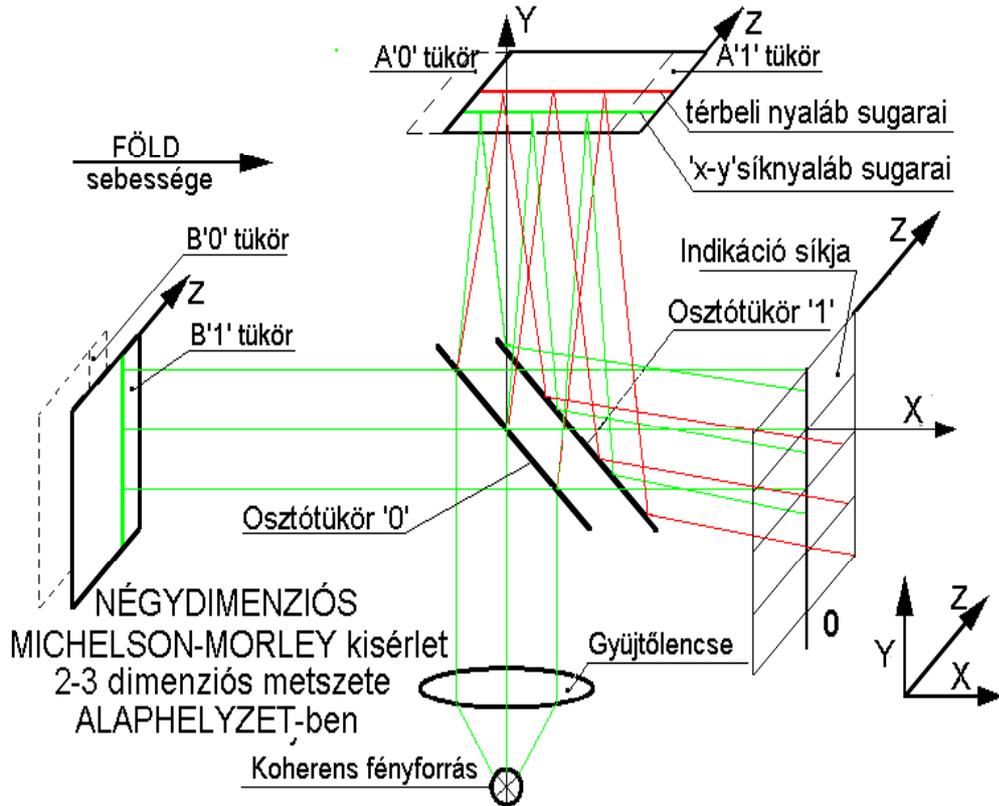
*Az interferencia jellemzőiről lásd 7.fejezet.

A Michelson-Morley kísérlet alaphelyzetében:

$$v_x = v_F \text{ és } v_y = 0$$

Az elforgatás után a koordináták és az „A” és „B” tükrök helyet cserélték:

$$v'_y = v_F \text{ és } v'_x = 0$$



2.ábra. Michelson-Morley kísérlet térmetszetei. $t \equiv \text{const.}$ zöld az xy sík, piros az xyz tér. I.

Továbbá a Föld mozgásával párhuzamosan haladó fénysugár esetében, visszaverődés előtt a fény és a Föld sebessége azonos irányú, míg a visszaverődés után ellentétes irányú., ennek következtében a \mathbf{k} irányú mozgás az oda és vissza vezető úton gyakorlatilag zérus. (Ténylegesen, mivel az oda és vissza megtett út nem egyenlő a kiegyenlítőds nem teljes.)

6.5. Michelson-Morley kísérlet tér-elemzése

6.5.1. GALILEI GEOMETRIA

A STUDY KOMPLEX SZÁMOK ALKALMAZÁSÁVAL.

Komplex kvázi négydimenziós 2+1-es transzformáló vektorral, a transzformált vektort az elfordult sík koordináta-rendszerében mérhető adatokat a mérés kezdetének megfelelő kordináta-rendszerbe transzformáljuk vissza.

Az eltelt időt mindig az osztótükör-visszaverőtükör-osztótükör utat megtévő fény hullámcsomagjainak információt szállítani tudó sebessége alapján számítjuk ki, amit „ c_0 ” jelez. A Föld sebességét \mathbf{v}_F -el jelöljük és minden mennyiséget az \mathbf{i} — \mathbf{j} — \mathbf{k} egységvektor hármassal jelölünk, míg a jelöletlen egységvektorú mennyiségek az „idő jellegű” mennyiségek.

$$\boxed{\text{Képzetes egységek: } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 0} \quad (6.19)$$

Komplex K_{G2} sík origójának tér-idővektora:

$$\mathbf{s}_0 = c_0 T_0 + \mathbf{i} X_0 + \mathbf{j} Y_0$$

A siktér-idővektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{s}_G| = c_0 T_0$$

A siktér-idő transzformáló vektora:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{tG} &= 1 + (\mathbf{i} X_0 + \mathbf{j} Y_0) / c_0 T_0 \\ \mathbf{s}_{tG} &= 1 + \mathbf{i} v_{2x} / c_0 + \mathbf{j} v_{2y} / c_0 \end{aligned}$$

A transzformálandó vektor:

$$\mathbf{s}_2 = c_0 \mathbf{t}_2 + \mathbf{i} x_2 + \mathbf{j} y_2$$

A transzformáló vektorszorzás:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{1G} &= \mathbf{s}_2 * \mathbf{s}_{tG} \\ \mathbf{S}_{1G} &= (c_0 \mathbf{t}_2 + \mathbf{i} x_2 + \mathbf{j} y_2) * (1 + \mathbf{i} v_{2x} / c_0 + \mathbf{j} v_{2y} / c_0) \end{aligned} \quad (6.20)$$

A transzformált vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{1G} &= c_0 \mathbf{t}_2 + \\ &+ \mathbf{i} (v_{2x} \mathbf{t}_2 + x_2) + \mathbf{j} (v_{2y} \mathbf{t}_2 + y_2) + \\ &+ \mathbf{k} (x_2 v_{2y} / c_0 - y_2 v_{2x} / c_0) \end{aligned} \quad (6.21)$$

vagy

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{tG} &= c t_1 + \mathbf{i} x_1 + \mathbf{j} y_1 + \\ &+ (\mathbf{i} v_x t_1 + \mathbf{j} v_y t_1 + \mathbf{k} (x_1 v_y / c - y_1 v_x / c)) \end{aligned} \quad (6.22)$$

ALAPHELYZET: 2.ábra

- Az $\overrightarrow{0_0B_1}$ és az $\overrightarrow{B_10_1}$ komplex fényvektorok nagysága:

– A „B” tükör felé

$$\overrightarrow{0_0B_1} = \mathbf{S}_{1GA1}$$

$$\begin{aligned} v_{2x} &= v_F \quad v_{2y} = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow -x \\ \Delta x_2 &= -\Delta x_{2B1}; \quad \Delta y_2 = 0; \quad \Delta z = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_{1GB1} = -c_0 \Delta t_{2B1} + \mathbf{i}(v_F \Delta t_{2B1} - \Delta x_{2B1}) \quad (6.23)$$

– Visszaverődés után:

$$\overrightarrow{B_10_1} = \mathbf{S}_{1GB2}$$

$$\begin{aligned} v &= v_F \quad v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow x \\ \Delta x_2 &= -\Delta x_{2B2}; \quad \Delta y_2 = 0; \quad \Delta z = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_{1GA2} = c_0 \Delta t_{2B2} + \mathbf{i}(v_F \Delta t_{2B2} - \Delta x_{2B2}) \quad (6.24)$$

– A „B” út fényvektorainak eredője:

$$\operatorname{Re} \sum \mathbf{S}_{1GA} = c_0(\Delta t_{2B2} - \Delta t_{2B1}) \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sum \mathbf{S}_{1GA} &= \mathbf{i}[v_F(\Delta t_{2B1} + \Delta t_{2B2}) \\ &\quad -(\Delta x_{2B1} + \Delta x_{2B2})] \end{aligned} \quad (6.26)$$

– Az „A” tükör felé:

$$\overrightarrow{0_0A_1} \mathbf{S} = \mathbf{S}_{1GA1}$$

$$\begin{aligned} v_{2x} &= v_F \quad v_{2y} = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow y \\ \Delta x_2 &= 0; \quad \Delta y_2 = \Delta y_{2A1}; \quad \Delta z = 0 \\ \mathbf{S}_{1GA1} &= c_0 \Delta t_{2A1} + \mathbf{i}v_F \Delta t_{2A1} + \mathbf{j}\Delta y_{2A1} \end{aligned} \quad (6.27)$$

– Visszaverődés után:

$$\overrightarrow{A_10_1} = \mathbf{S}_{1GA2}$$

$$\begin{aligned} v_{2x} &= v_F \quad v_{2y} = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow -y \\ \Delta x_2 &= 0; \quad \Delta y_2 = -\Delta y_{2A2}; \quad \Delta z = 0 \\ \mathbf{S}_{1GA2} &= -c_0 \Delta t_{2A2} + \mathbf{i}v_F \Delta t_{2A2} - \mathbf{j}\Delta y_{2A2} \end{aligned} \quad (6.28)$$

– Az „A” út fényvektorainak eredője:

$$\operatorname{Re} \sum \mathbf{S}_{1GA} = -c_0(\Delta t_{2A1} - \Delta t_{2A2}) \quad (6.29)$$

$$\boxed{\operatorname{Im} \sum \mathbf{S}_{1GA} = \mathbf{i}v_F(\Delta t_{2A1} + \Delta t_{2A2}) + \mathbf{j}(\Delta y_{2A1} - \Delta y_{2A2})} \quad (6.30)$$

Legyen a két tükör és az osztótükör távolsága azonos: \mathbf{L}

$$\begin{aligned} \Delta x_{2A1} &= \Delta x_{2A2} = \Delta y_{2B1} = \Delta y_{2B2} = L \\ \Delta t_{2A} &= \Delta t_{2B} = \frac{L}{c_0} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Ez azért megengedhető, mert a tükrök beállítása az interferenciacsíkok láthatóságára azzal jár, hogy a két tükör-osztótükör távolság az interferencia tulajdonságai következtében $N \times \lambda_0$ hosszban különbözhet egymástól, amely az elforgatás következtében nem változó futásiidő különbséget jelent, és így az interferenciakép megváltozását nem okozhatja.

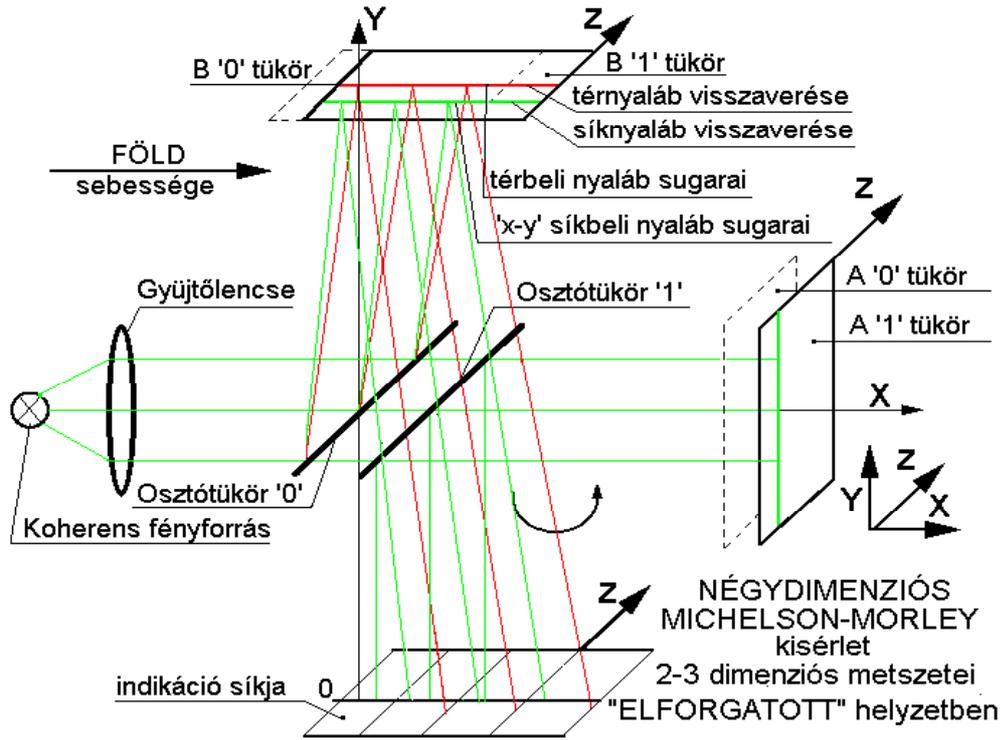
A fentiek következtében:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta x_{2A1} - \Delta x_{2A2} &= 0 \\ \Delta y_{2B1} - \Delta y_{2B2} &= 0 \end{aligned}}$$

- Az alaphelyzetben **A** és **B** tükrök és az **osztótükör** között a fényvektorok hossza közti különbség:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\sum \mathbf{S}_{tGB} - \sum \mathbf{S}_{tGA})_{12} &= \\ &= v_F[(\Delta t_{2B1} + \Delta t_{2B2}) - \\ &\quad - (\Delta t_{2A1} + \Delta t_{2A2})] \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\sum \mathbf{S}_{tGB} - \sum \mathbf{S}_{tGA})_{12} &= \\ &= 2v_F(\Delta t_{2B} - \Delta t_{2A}) \equiv 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$



3.ábra. Michelson-Morley kísérlet térmetszetei. $t \equiv \text{const.}$ zöld az xy sík, piros az xyz tér. II.

ELFORGATÁSI HELYZET: 3.ábra

Elforgatott helyzetben az alaphelyzet kezdeti időpontjának koordináta-rendszerét megtartva, a mérési helyzetben „B” jelű tükör a „ v_F ” irányának megfelelő „x” tengellyel párhuzamosan és „y” tengelyre merőlegesen helyezkedik el, míg az „A” jelű tükör a pozitív „x” tengelyen van.

- Elforgatási helyzetben az $\overrightarrow{0_0A_1}$ és az $\overrightarrow{A_10_1}$ komplex fényvektorok nagysága:

– Az „A” tükör felé:

$$\overrightarrow{0_0A_1} = \mathbf{S}_{1GB3}$$

$$v_x = v_F \quad v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow x$$

$$\Delta x_2 = x_{2A3}; \quad \Delta y_2 = 0; \quad \Delta z = 0$$

$$\mathbf{S}_{1GA3} = c_0 \Delta t_{2A3} + \mathbf{i}(v_F \Delta t_{2A3} + \Delta x_{2A3}) \quad (6.34)$$

– Visszaverődés után:

$$\overrightarrow{A_10_1} = \mathbf{S}_{1GA4}$$

$$v_x = v_F \quad \text{és} \quad v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow -x$$

$$\Delta x_2 = -\Delta x_{2A4}; \quad \Delta y = 0; \quad \Delta z = 0$$

$$\mathbf{S}_{1GA4} = -c_0 \Delta t_{2A4} + \mathbf{i}(v_F \Delta t_{2A4} - \Delta x_{2A4}) \quad (6.35)$$

– Az „A” út eredője:

$$\operatorname{Re} \sum \mathbf{S}_{1GA} = c_0(\Delta t_{2A3} - t_{2A4}) \quad (6.36)$$

$$\boxed{\operatorname{Im} \sum \mathbf{S}_{1GA} = \mathbf{i}v_F(\Delta t_{2A3} + \Delta t_{2A4}) + \mathbf{i}(\Delta x_{2A3} - \Delta x_{2A4})} \quad (6.37)$$

– A „B,, tükrör felé:

$$\overrightarrow{0_0B_1} = \mathbf{S}_{1GB3}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F; \quad v_y = 0; \quad c = c_0 \Rightarrow y \\ \Delta x_2 &= 0; \quad \Delta y_2 = \Delta y_{2B3}; \quad \Delta z = 0 \\ \mathbf{S}_{1GB3} &= c_0 \Delta t_{2B3} + \mathbf{i}v_F \Delta t_{2B3} + \mathbf{j} \Delta y_{2B3} \end{aligned} \quad (6.38)$$

– Visszaverődés után:

$$\overrightarrow{B_10_1} = \mathbf{S}_{1GB4}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \quad v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow -y \\ \Delta x_2 &= 0; \quad \Delta y_2 = -\Delta y_{2B4}; \quad \Delta z = 0 \\ \mathbf{S}_{1GA4} &= -c_0 \Delta t_{2B4} + \mathbf{i}v_F \Delta y_{2B4} - \mathbf{j} \Delta y_{2B4} \end{aligned} \quad (6.39)$$

– A „B,, út eredője:

$$\operatorname{Re} \sum \mathbf{S}_{1GB} = c_0(\Delta t_{2B4} - t_{2B4}) \quad (6.40)$$

$$\boxed{\operatorname{Im} \sum \mathbf{S}_{1GB} = \mathbf{i}v_F(\Delta t_{2B3} + \Delta t_{2B4}) + \mathbf{i}(\Delta x_{2B3} - \Delta x_{BB4})} \quad (6.41)$$

Legyen a két tükrör és az osztótükrör távolsága azonos: L

$$\begin{aligned} \Delta x_{A3} &= \Delta x_{A4} = \Delta y_{B3} = \Delta y_{B4} = L \\ \Delta t_{2A} &= \Delta t_{2B} = \frac{L}{c_0} \end{aligned}$$

– Az elforgatott helyzetben **A** és **B** tükrörök és az osztótükrör között a fényvektorok hossza közti különbséget, és minden a kísérletben szereplő fizikai méretek változatlanságára vonatkozó állítást, az elforgatás során is érvényesnek tekintjük, hasonlóan az alaphelyzethez..

– Így az elforgatott helyzetben az „A” és „B” tükrörök és az osztótükrör között a fényvektorok közti oda-vissza hossz közti különbség:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}(\sum \mathbf{S}_{1GA} - \sum \mathbf{S}_{1GB})_{34} &= \\
 &= v_F(\Delta t_{2A3} + \Delta t_{2A4} - \Delta t_{2B3} - \Delta t_{2A4}) \\
 \operatorname{Im}(\sum \mathbf{S}_{1GA} - \sum \mathbf{S}_{1GB})_{34} &= 2v_F(\Delta t_{2A} - \Delta t_{2B}) \equiv 0
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

Összefoglalva: a Michelson-Morley kísérlet eredménye, az interferenciacsíkok mozdulatlansága, a mérési hibahatáron belül, nem ellentétes a GALILEI geometriával, mivel mind az alap mind az elforgatott helyzetben a fényvektorok hosszának különbsége gyakorlatilag zérus, feltéve hogy a GALILEI TRANSZFORMÁCIÓT következetesen alkalmazzuk és kizárjuk a távolság meghatározó elemek bármiféle deformációját.

6.5.2. MINKOWSKI GEOMETRIA.

A HIPERBOLIKUS KOMPLEX SZÁMOK ALKALMAZÁSÁVAL.

$$\boxed{\text{Képzetes egységek: } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1} \tag{6.43}$$

Ennek sík téridő-geometriájú változata:

$$z = z^2 \equiv 0$$

Komplex K_{G2} sík origójának téridővektora:

$$\mathbf{s}_0 = cT_0 + \mathbf{i}X_0 + \mathbf{j}Y_0$$

A síktéridővektor abszolút értéke:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{s}_0| &= (c_0^2 T_0^2 - X_0^2 - Y_0^2)^{1/2} \\
 |\mathbf{s}_0| &= c_0 T_0 (1 - v_x^2/c_0^2 - v_y^2/c_0^2)^{1/2}
 \end{aligned}$$

Négydimenziós sík-téridő transzformáló vektorok elfajulnak:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_{Mtx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_x/c_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} + \mathbf{j} \frac{v_y/c_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \\
 \mathbf{s}_{Mxt} &= \frac{c_0/v}{\sqrt{v^2/c_0^2 - 1}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{v^2/c_0^2 - 1}} + \mathbf{j} \frac{1}{\sqrt{v^2/c_0^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

ahol: $\boxed{v^2 = v_x^2 - v_y^2 \text{ ha } v_x \geq v_y}$

illetve: $\boxed{v^2 = v_y^2 - v_x^2 \text{ ha } v_y \geq v_x}$

A transzformálandó vektor:

$$\mathbf{s}_2 = c_0 \mathbf{t}_2 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2$$

A transzformáló vektorszorzás:

$$\mathbf{S}_{1M} = \mathbf{s}_2 * \mathbf{s}_{tM}$$

$$\mathbf{S}_{1M} = (c_0 t_2 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2) \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_x/c_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} + \mathbf{j} \frac{v_y/c_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \right)$$

A transzformált vektor:

$$\mathbf{S}_{1M} = \frac{c_0 t_2 + x_2 v_x/c_0 + y_2 v_y/c_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_x t_2 + x_2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} + \mathbf{j} \frac{v_y t_2 + y_2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} + \mathbf{k} \frac{y_2 v_x/c_0 - x_2 v_y/c_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

ALAPHELYZET: 2.ábra

- Alaphelyzetben az $\overrightarrow{0_0 B_1}$ és az $\overrightarrow{B_1 0_1}$ komplex fényvektorok nagysága:

– A „B” tükör felé:

$$\overrightarrow{0_0 B_1} = \mathbf{S}_{1MB1}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \text{ és } v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow -x \\ \Delta x_2 &= -\Delta x_{2B1}; \Delta y_2 = 0; \Delta z = 0 \\ \mathbf{S}_{1MA1} &= \frac{(-c_0 \Delta t_{2B1} + \Delta x_{2B1} v_F/c_0) + \mathbf{i}(v_F \Delta t_{2B1} - \Delta x_{2B1})}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.44)$$

– Visszaverődés után:

$$\overrightarrow{B_1 0_1} = \mathbf{S}_{1MB2}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \text{ s } v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow x \\ \Delta x_2 &= -\Delta x_{2B2}; \Delta y = 0; z = 0 \\ \mathbf{S}_{1MA2} &= \frac{(c_0 \Delta t_{2B2} - \Delta x_{2B2} v_F/c_0) + \mathbf{i}(v_F \Delta t_{2B2} - \Delta x_{2B2})}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.45)$$

– A „B,, út eredője:

$$\boxed{\operatorname{Re} \sum \mathbf{S}_{1MB} = \frac{-c_0(\Delta t_{2B1} - \Delta t_{2B2}) + v_F/c_0(\Delta x_{2B1} - \Delta x_{2B2})}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}}} \quad (6.46)$$

$$\boxed{\operatorname{Im} \sum \mathbf{S}_{1MB} = \frac{(v_F \Delta t_{2B1} - \Delta x_{2B1}) + (v_F \Delta t_{2B2} - \Delta x_{2B2})}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}}} \quad (6.47)$$

- Alaphelyzetben az $\overrightarrow{0_0A_1}$ és az $\overrightarrow{A_10_1}$ komplex fényvektorok nagysága:
- Az „A” tükör felé:

$$\overrightarrow{0_0A_1} = \mathbf{S}_{1MA1}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \quad \text{és} \quad v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow y \\ \Delta x_2 &= 0; \quad \Delta y_2 = \Delta y_{2A1}; \quad z = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_{1MA1} = \frac{(c_0 \Delta t_{2A1} + \Delta y_{2A1} v_F / c_0) + \mathbf{i} v_F \Delta t_{2A1} + \mathbf{j} \Delta y_{2A1} + \mathbf{k} \Delta y_{A1} v_F / c_0}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \quad (6.48)$$

- Visszaverődés után:

$$\overrightarrow{A_10_1} = \mathbf{S}_{1MA2}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \quad \text{s} \quad v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow -x \\ \Delta x_2 &= 0; \quad \Delta y = -\Delta y_{2A2}; \quad z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{1MA2} &= \frac{(-c_0 \Delta t_{2A2} + \Delta y_{2A2} v_F / c_0) + \mathbf{i} v_F \Delta t_{2A2}}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} - \\ &\quad - \frac{\mathbf{j} \Delta y_{A2} - \mathbf{k} \Delta y_{A1} v_F / c_0}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.49)$$

- Az „A” út eredője:

$$\boxed{\mathbf{Re} \sum \mathbf{S}_{1MA} = \frac{c_0(\Delta t_{2A1} - \Delta t_{2A2}) + v_F / c_0(\Delta y_{2A1} + \Delta y_{2A2})}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}}} \quad (6.50)$$

$$\boxed{\mathbf{Im} \sum \mathbf{S}_{1MA} = \frac{\mathbf{i} v_F(\Delta t_{2A1} + \Delta t_{2A2}) + \mathbf{j}(\Delta y_{2A1} - \Delta y_{2A2})}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}}} \quad (6.51)$$

Legyen a két tükör és az osztótükör távolsága azonos: L

$$\begin{aligned} \Delta x_{2A1} &= \Delta x_{2A2} = \Delta y_{2B1} = \Delta y_{2B2} = L \\ \Delta t_{2A} &= \Delta t_{2B} = L / c_0 \sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2} \end{aligned}$$

Ez azért megengedhető, mert a tükrök beállítása az interferencia csíkok láthatóságára azzal jár, hogy a két osztótükör-tükör távolság az interferencia tulajdonságai következtében $\boxed{N \times \lambda_0}$ hosszban különbözhet egymástól, amely az elforgatás következtében nem változó futási időkülönbséget jelent és így az interferenciakép megváltozását nem okozhatja.

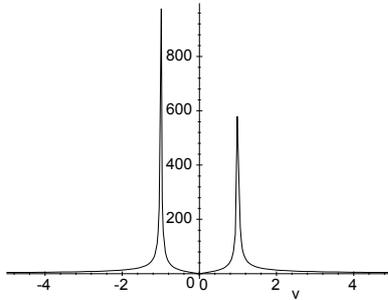
Az *Alaphelyzetben* **A** és **B** tükrök és az osztótükör között a fénysugár által befutott utak közti útkülönbség.

$$\begin{aligned} \text{Im} \sum \mathbf{S}_{1MA} - \sum \mathbf{S}_{1MB})_b &= \mathbf{i} \frac{(v_F(\Delta t_{2A1} + \Delta t_{2A2}) + (\Delta x_{2A1} - \Delta x_{2A2}))}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \\ &\quad - \mathbf{i} \frac{v_F(\Delta t_{2B1} + \Delta t_{2B2})}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} - \mathbf{j} \frac{(\Delta y_{2B1} - \Delta y_{2B2})}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \\ \left| \text{Im} \sum \mathbf{S}_{1MA} - \sum \mathbf{S}_{1MB})_b \right| &= \frac{2v_F \Delta t_{2A}}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} = \frac{2v_F L/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.52)$$

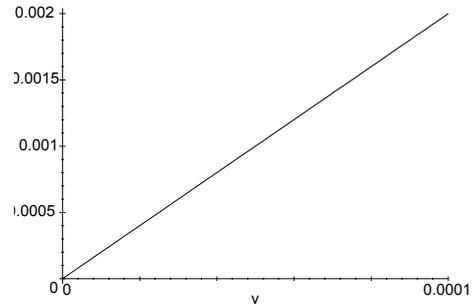
$$\left| \text{Im}(\sum \mathbf{S}_{1MA} - \sum \mathbf{S}_{1MB})_b \right| = \frac{2v_F L}{c_0 \sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (6.53)$$

$$F_{VEKT} = \left| \text{Im}(\sum \mathbf{S}_{tMA} - \sum \mathbf{S}_{tMB})_b \right| \quad (6.54)$$

$$\boxed{F_{VEKT} = \left| 2 * v * 10 * \frac{1}{1 - v^2} \right|}$$



Fényvektorok különbsége nagy v_F -nél



Fényvektorok különbsége kis v_F -nél.

ELFORGATOTT HELYZET: 3.ábra.

Elforgatott helyzetben az alaphelyzet kezdeti időpontjának koordináta-rendszerét megtartva, a mérési helyzetben „B” jelű tükör a „ v_F ” irányának megfelelő „ x ” tengellyel párhuzamosan helyezkedik el, míg az „A” jelű tükör a pozitív „ x ” tengelyen.

- Elforgatott helyzetben az $\overrightarrow{0_0A_1}$ és az $\overrightarrow{A_10_1}$ komplex fényvektorok nagysága:

– Az „A” tükör felé:

$$\overrightarrow{0_0A_1} = \mathbf{S}_{1MA3}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \quad v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow x \\ \Delta x_2 &= \Delta x_{2B3}; \Delta y = 0; z = 0 \\ \mathbf{S}_{1MB3} &= \frac{c_0 \Delta t_{2A3} + \Delta x_{2A3} v_F / c_0 + \mathbf{i}(v_F \Delta t_{2A3} + \Delta x_{2A3})}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.55)$$

– Visszaverődés után:

$$\overrightarrow{B_10_1} = \mathbf{S}_{1MA4}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \quad v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow -x \\ \Delta x_2 &= -\Delta x_{2A4}; \Delta y = 0; z = 0 \\ \mathbf{S}_{1MB4} &= \frac{-c_0 \Delta t_{2A4} + \Delta x_{2A4} v_F / c_0 + \mathbf{i}(v_F \Delta t_{2A4} - \Delta x_{2A4})}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.56)$$

– Az „A,” út eredője:

$$\begin{aligned} \text{Re} \sum \mathbf{S}_{1MA} &= \frac{c_0(\Delta t_{2A3} - \Delta t_{2A4})}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} + \\ &+ \frac{v_F / c_0(\Delta x_{2A3} + \Delta x_{2A4})}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} \text{Im} \sum \mathbf{S}_{1MB} &= \frac{(v_F \Delta t_{2A3} + \Delta x_{2A3})}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} + \\ &+ \frac{(v_F \Delta t_{2A4} + \Delta x_{2A4})}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.58)$$

- Elforgatott helyzetben az $\overrightarrow{0_0B_1}$ és az $\overrightarrow{B_10_1}$ komplex fényvektorok nagysága:

– A „B” tükör felé:

$$\overrightarrow{0_0B} = \mathbf{S}_{1B3}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \quad v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow y \\ \Delta x_2 &= 0; \Delta y_2 = \Delta y_{2B3}; z = 0 \\ \mathbf{S}_{1MB1} &= \frac{(c_0 \Delta t_{2B3} + \Delta y_{2B3} v_F / c_0)}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} + \\ &+ \frac{\mathbf{i} v_F \Delta t_{2B3} + \mathbf{j} \Delta y_{2B3} + \mathbf{k} \Delta y_{2B3} v_F / c_0}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.59)$$

– Visszaverődés után:

$$\overrightarrow{B_1 0_1} = \mathbf{S}_{1A4}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \quad s \quad v_Y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow -y \\ \Delta x_2 &= 0; \quad \Delta y_2 = -\Delta y_{2B4}; \quad z = 0 \\ \mathbf{S}_{1MB2} &= \frac{(-c_0 \Delta t_{2B4} + \Delta y_{2B4} v_F / c_0)}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} + \\ &+ \frac{\mathbf{i} v_F \Delta t_{2B4} + \mathbf{j} \Delta y_{2B4} - \mathbf{k} \Delta y_{2B4} v_F / c_0}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.60)$$

– Az „A” út eredője:

$$\begin{aligned} \mathbf{Re} \sum \mathbf{S}_{1MB} &= \frac{c_0 (\Delta t_{2A3} - \Delta t_{2A4}) +}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \\ &+ \frac{v_F / c_0 (-\Delta y_{2A3} + \Delta y_{2A4})}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Im} \sum \mathbf{S}_{1MB} &= \frac{\mathbf{i} v_F (\Delta t_{2A3} + \Delta t_{2A4}) +}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \\ &+ \frac{\mathbf{j} (-\Delta y_{2A3} + \Delta y_{2A4})}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.62)$$

Legyen a két tükör és az osztótükör távolsága azonos:

$$\Delta x_{2A3} = \Delta x_{2A4} = \Delta y_{2B3} = \Delta y_{2B4} = L \quad (6.63)$$

$$\Delta t_{2A} = \Delta t_{2B} = L / c_0 \sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2} \quad (6.64)$$

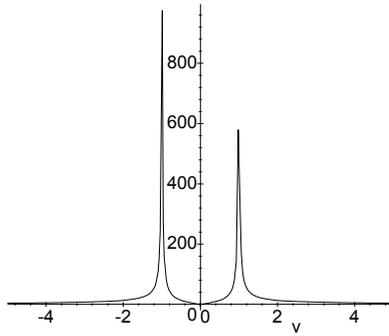
Az elforgatott helyzetben **A** és **B** tükrök és az osztótükör között a fénysugár által befutott utak közti útkülönbség, minden a kísérletben szereplő fizikai méretek változatlanságára vonatkozó állítást az elforgatás során is érvényesnek tekintjük, hasonlóan az alaphelyzetre tett megállapításhoz.

- Az elforgatott helyzetben A és B tükrök és az osztótükör között a fénysugár által befutott utak közti útkülönbség:

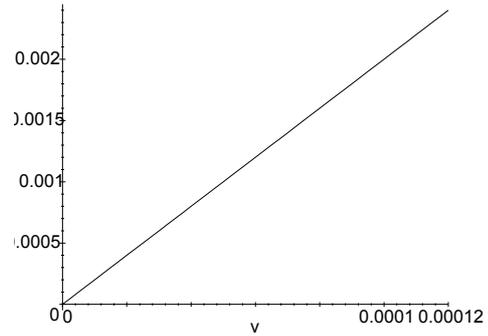
$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\sum \mathbf{S}_{1MA} - \sum \mathbf{S}_{1MB})_e &= \mathbf{i} \frac{v_F(\Delta t_{2A3} - \Delta t_{2A4}) + (\Delta x_{2A3} - \Delta x_{2A4})}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \\ &\quad - \mathbf{i} \frac{v_F(\Delta t_{2B3} + \Delta t_{2B4})}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} + \mathbf{j} \frac{(\Delta y_{2B3} + \Delta y_{2B4})}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \\ \left| \operatorname{Im} \sum \mathbf{S}_{1MA} - \sum \mathbf{S}_{1MB} \right|_e &= \frac{2v_F \Delta t_{2A}}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \\ \left| \operatorname{Im}(\sum \mathbf{S}_{1MA} - \sum \mathbf{S}_{1MB})_e \right| &= \frac{2v_F L}{c_0 \sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$F_{VEKT} = \left| \operatorname{Im}(\sum \mathbf{S}_{tMA} - \sum \mathbf{S}_{tMB})_e \right| \quad (6.66)$$

$$\boxed{F_{VEKT} = \left| 2 * v * 10 * \frac{1}{1 - v^2} \right|} \quad \text{ha } c_0 \equiv 1$$



Fényvektorok különbsége nagy v_F -nél.



Fényvektorok különbsége kis v_F -nél.

$$\operatorname{Im}(\sum \mathbf{S}_{1MA} - \sum \mathbf{S}_{1MB})_b = \operatorname{Im}(\sum \mathbf{S}_{1MA} - \sum \mathbf{S}_{1MB})_e = 0$$

Összefoglalva: a Michelson-Morley kísérlet eredménye, az interferenciacsíkok mozdulatlansága, megfelel a Minkowski geometriának, mind a beállítási mind az elforgatott helyzetben a fényvektorok útkülönbsége közel zérus, és nagyságuk azonos, feltéve hogy a **LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓT** következetesen alkalmazzuk és kizárjuk a távolság meghatározó elemek bármiféle deformációját.

6.5.3. EUKLIDESZ GEOMETRIA.

A KOMPLEX SZÁMOK ALKALMAZÁSÁVAL.

$$\boxed{\text{A képzetes egységek: } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1} \quad (6.67)$$

Ennek síktér-időgeometriájú változata:

$$z = z^2 \equiv 0$$

Komplex K_{G2} sík origójának téridővektora:

$$\mathbf{s}_0 = c_0 T_0 + \mathbf{i}X_0 + \mathbf{j}Y_0$$

A síktéridővektor abszolút értéke:

$$\begin{aligned} |\mathbf{s}_0| &= (c_0^2 T_0^2 - X_0^2 - Y_0^2)^{1/2} \\ |\mathbf{s}_0| &= c_0 T_0 (1 - v_x^2/c_0^2 - v_y^2/c_0^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Komplex téridősík vektor:

$$\mathbf{s}_0 = c_0 t + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$$

Komplex téridősík vektor abszolút értéke:

$$\begin{aligned} |\mathbf{s}_0| &= (c_0^2 t^2 + x^2 + y^2)^{1/2} \\ |\mathbf{s}_0| &= c_0 t (1 + v_x^2/c_0^2 + v_y^2/c_0^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Komplex kvázi négydimenziós transzformáló vektor, amikor a transzformált vektor az elmozdult sík koordináta-rendszerében mérhető adatokat a mérés kezdetének megfelelő koordináta-rendszerbe transzformáljuk vissza az eltelt időt mindig az osztótükör-visszaverő tükör-osztótükör utat megtevő fény hullámcsoomagjainak információát szállítani tudó sebessége alapján számítjuk ki, amit „ c_0 ” jelez.

A négydimenziós transzformáló vektor elfajul:

$$\mathbf{s}_{Etxy} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_x/c_0}{\sqrt{1 + v^2/c_0^2}} + \mathbf{j} \frac{v_y/c_0}{\sqrt{1 + v^2/c_0^2}} \quad (6.68)$$

ahol

$$v_F^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (6.69)$$

A transzformálandó vektor:

$$\mathbf{s}_2 = c_0 t_2 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2$$

A transzformáló vektorszorzás: $\mathbf{S}_{tE} = \mathbf{s} * \mathbf{s}_{tE}$

$$\mathbf{S}_{1E} = (c_0 t_2 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_x/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} + \mathbf{j} \frac{v_y/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \right)$$

A transzformált vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{1E} &= \frac{c_0 t_2 - x_2 v_x/c_0 - y_2 v_y/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_x t_2 + x_2}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \\ &+ \mathbf{j} \frac{v_y t_2 + y_2}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} + \mathbf{k} \frac{y_2 v_x/c_0 - x_2 v_y/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.70)$$

ALAPHELYZET: 2.ábra.

Alaphelyzetben az $\overrightarrow{0_0B_1}$ és az $\overrightarrow{B_10_1}$ komplex fényvektorok nagysága:

– A „B” tükör felé:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0_0B_1} &= \mathbf{S}_{1EB1} \\ v_x &= v_F \quad s \quad v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow -x \\ \Delta x_2 &= -\Delta x_{2B1}; \quad \Delta y_2 = 0; \quad z = 0 \\ \mathbf{S}_{1EB1} &= \frac{(-c_0 \Delta t_{2B1} - \Delta x_{2B1} v_F / c_0)}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} + \\ &+ \frac{i(v_F \Delta t_{2B1} - \Delta x_{2B1})}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.71)$$

– Visszaverődés után:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_10_1} &= \mathbf{S}_{1EB2} \\ v_x &= v_F \quad s \quad v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow x \\ \Delta x_2 &= -\Delta x_{2B2}; \quad \Delta y_2 = 0; \quad z = 0 \\ \mathbf{S}_{1EB2} &= \frac{(c_0 \Delta t_{2B2} + \Delta x_{2B2} v_F / c_0) +}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \\ &+ \frac{i(v_F \Delta t_{2B2} - \Delta x_{2B2})}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.72)$$

• A „B” út eredője:

$$\boxed{\operatorname{Re} \sum \mathbf{S}_{1EB} = \frac{-c_0(\Delta t_{2B1} - \Delta t_{2B2}) - (v_F / c_0)(\Delta x_{2B2} - \Delta x_{2B1})}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}}} \quad (6.73)$$

$$\boxed{\operatorname{Im} \sum \mathbf{S}_{1EB} = \frac{v_F(\Delta t_{2B1} + \Delta t_{2B2}) - (\Delta x_{2B1} + \Delta x_{2B2} + \Delta x_{2B2})}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}}} \quad (6.74)$$

• Alaphelyzetben az $\overrightarrow{0_0A_1}$ és az $\overrightarrow{A_10_1}$ komplex fényvektorok nagysága:

– Az „A” tükör felé:

$$\overrightarrow{0_0A_1} = \mathbf{S}_{1MA1}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \text{ és } v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow y \\ \Delta x_2 &= 0; \Delta y_2 = \Delta y_{2A1}; \quad z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{1EA1} &= \frac{(c_0 \Delta t_{2A1} - \Delta y_{2A1} v_F / c_0) + \mathbf{i} v_F \Delta t_{2A1}}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \\ &\quad + \frac{\mathbf{j} \Delta y_{2A1} + \mathbf{k} \Delta y_{A1} v_F / c_0}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.75)$$

– Visszaverődés után:

$$\overrightarrow{A_1 0_1} = \mathbf{S}_{1EA2}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \text{ s } v_y = 0 \quad c = c_0 \Rightarrow -y \\ \Delta x_2 &= 0; \Delta y = -\Delta y_{2A2}; \quad z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{1EA2} &= \frac{(-c_0 \Delta t_{2A2} - \Delta y_{2A2} v_F / c_0) + \mathbf{i} v_F \Delta t_{2A2}}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \\ &\quad - \frac{\mathbf{j} \Delta y_{2A2} - \mathbf{k} \Delta y_{A1} v_F / c_0}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.76)$$

– Az „A” út eredője:

$$\boxed{\mathbf{Re} \sum \mathbf{S}_{1EB} = \frac{c_0 (\Delta t_{2A1} - \Delta t_{2A2}) - v_F / c_0 (\Delta y_{2A1} + \Delta y_{2A2})}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}}} \quad (6.77)$$

$$\boxed{\mathbf{Im} \sum \mathbf{S}_{1EB} = \frac{\mathbf{i} v_F (\Delta t_{2A1} + \Delta t_{2A2}) + \mathbf{j} (\Delta y_{2A1} - \Delta y_{2A2})}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}}} \quad (6.78)$$

Legyen a két tükör és az osztótükör távolsága azonos: L

$$\begin{aligned} \Delta x_{2A1} &= \Delta x_{2A2} = \Delta y_{2B1} = \Delta y_{2B2} = L \\ \Delta t_{2A} &= \Delta t_{2B} = \frac{L}{c_0 \sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned}$$

Ez azért megengedhető, mert a tükrök beállítása az interferencia csíkok láthatóságára azzal jár, hogy a két osztótükör-tükör távolság az interferencia tulajdonságai következtében $\boxed{N \times \lambda_0}$ hosszban különbözhet egymástól, amely az elforgatás következtében nem változó futási időkülönbséget jelent és így az interferenciakép megváltozását nem okozhatja.

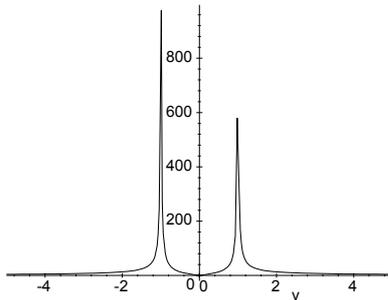
$$\begin{aligned} \Delta x_{2A1} &= \Delta x_{2A2} = \Delta y_{2B1} = \Delta y_{2B2} = L \\ \Delta t_{2A} &= \Delta t_{2B} = \frac{L}{c_0 \sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \end{aligned}$$

Az alaphelyzetben **A** és **B** tükrök és az osztótükör között a fénysugár által befutott utak közti útkülönbség: Itt azt kell figyelembevenni, hogy

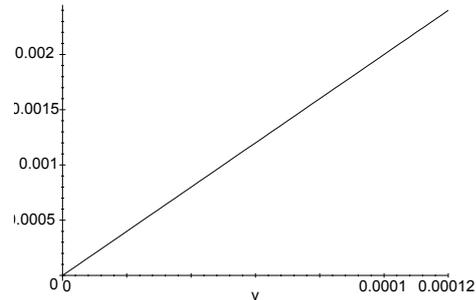
$$\begin{aligned} \text{Im} \sum \mathbf{S}_{1EA} - \sum \mathbf{S}_{1EB} \Big|_b &= \mathbf{i} \frac{(v_F(\Delta t_{2A1} + \Delta t_{2A2}) + (\Delta x_{2A1} - \Delta x_{2A2}))}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \\ &\quad + \mathbf{i} \frac{v_F(\Delta t_{2B1} + \Delta t_{2B2})}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} - \mathbf{j} \frac{(\Delta y_{2B1} - \Delta y_{2B2})}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \\ \left| \text{Im} \sum \mathbf{S}_{1EA} - \sum \mathbf{S}_{1EB} \right|_b &= \frac{2v_F \Delta t_{2A}}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \\ \left| \text{Im} \left(\sum \mathbf{S}_{1MA} - \sum \mathbf{S}_{1MB} \right)_b \right| &= \frac{2v_FL}{c_0 \sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \end{aligned} \tag{6.79}$$

$$F_{VEKT} = \left| \text{Im} \left(\sum \mathbf{S}_{tMA} - \sum \mathbf{S}_{tMB} \right)_b \right| \tag{6.80}$$

$$\boxed{F_{VEKT} = \left| 2 * v * 10 * \frac{1}{1 - v^2} \right|} \quad \text{ha} \quad c_0 \equiv 1$$



Fényvektorok különbsége nagy v_F -nél



Fényvektorok különbsége kis v_F -nél.

ELFORGATOTT HELYZET: 3. ábra.

Elforgatott helyzetben a beállítási helyzet kezdeti időpontjának koordináta-rendszerét megtartva a mérési helyzetben „B” jelű tükör a „ v_F ” irányának megfelelő pozitív „ x ” tengelyen helyezkedik el, míg az „A” jelű tükör a negatív „ y ” tengelyen.

Ennek megfelelően a képzetes egységvektorok előjelei: $\boxed{\mathbf{i} \rightarrow +; \mathbf{j} \rightarrow -}$

- Elforgatott helyzetben az $\overrightarrow{0_1A_1}$ és az $\overrightarrow{A_10_1}$ komplex fényvektorok nagysága:

– Az „A” tükör felé:

$$\overrightarrow{0_1A_1} = \mathbf{S}_{1EA3}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \quad s \quad v_y = 0 \quad c_0 = c \Rightarrow x \\ \Delta x_2 &= \Delta x_{2A3}; \quad \Delta y_2 = 0; \quad z = 0 \\ \mathbf{S}_{1EB3} &= \frac{(c_0 \Delta t_{2A3} - \Delta x_{2A3} v_F / c_0) +}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \\ &\quad + \frac{\mathbf{i}(v_F \Delta t_{2A3} + \Delta x_{2A3})}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.81)$$

– Visszaverődés után:

$$\overrightarrow{A_10_1} = \mathbf{S}_{1EA4}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_F \quad s \quad v_y = 0; \quad c = c_0 \Rightarrow -x \\ \Delta x_2 &= -\Delta x_{2A4}; \quad \Delta y_2 = 0; \quad z = 0 \\ \mathbf{S}_{1EB4} &= \frac{(-c_0 \Delta t_{2B4} - \Delta x_{2B4} v_F / c_0) +}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \\ &\quad + \frac{\mathbf{i}(v_F \Delta t_{2A4} - \Delta x_{2A4})}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.82)$$

– Az „A” út eredője:

$$\boxed{\operatorname{Re} \sum \mathbf{S}_{1EA} = \frac{c_0(\Delta t_{2A3} - \Delta t_{2A4}) - v_F / c_0(\Delta x_{2A3} + \Delta x_{2A4})}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}}} \quad (6.204)$$

$$\boxed{\operatorname{Im} \sum \mathbf{S}_{1EA} = \frac{v_F(\Delta t_{2A3} + \Delta t_{2A4}) + (\Delta x_{2A3} - \Delta x_{2A4})}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}}} \quad (6.205)$$

- Elforgatott helyzetben az $\overrightarrow{0B}$ és az $\overrightarrow{B0_1}$ komplex fényvektorok nagysága:

• A „B” tükör felé:

$$\overrightarrow{0_1B_1} = \mathbf{S}_{1EB3}$$

$$\begin{aligned}
 v_x &= v_F \quad s \quad v_y = 0; \quad c = c_0 \Rightarrow y \\
 \Delta x_2 &= 0; \Delta y_2 = \Delta y_{2B3}; \quad z = 0 \\
 \mathbf{S}_{1EB3} &= \frac{(c_0 \Delta t_{2B3} + \Delta y_{2B3} v_F / c_0)}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} + \\
 &+ \frac{\mathbf{i} v_F \Delta t_{2B3} + \mathbf{j} \Delta y_{2B3} + \mathbf{k} \Delta y_{2B3} v_F / c_0}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \quad (6.83)
 \end{aligned}$$

– Visszaverődés után:

$$\overrightarrow{B_1 0_1} = \mathbf{S}_{1EB4}$$

$$\begin{aligned}
 v_x &= v_F \quad s \quad v_y = 0; \quad c = c_0 \Rightarrow -y \\
 \Delta x_2 &= 0; \Delta y_2 = -\Delta y_{2B4}; \quad z = 0 \\
 \mathbf{S}_{1EB4} &= \frac{(-c_0 \Delta t_{2B4} - \Delta t_{2B4} v_F / c_0)}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} + \\
 &+ \frac{\mathbf{i} v_F \Delta t_{2B4} - \mathbf{j} \Delta y_{2B4} - \mathbf{k} \Delta y_{2B4} v_F / c_0}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \quad (6.84)
 \end{aligned}$$

– Az „A” út eredője:

$$\operatorname{Re} \sum \mathbf{S}_{1EA} = \frac{-c_0(\Delta t_{2A3} + \Delta t_{2A4}) + v_F / c_0(-\Delta y_{2A3} + \Delta y_{2A4})}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \quad (6.85)$$

$$\operatorname{Im} \sum \mathbf{S}_{1EA} = \frac{\mathbf{i} v_F(\Delta t_{2A3} + \Delta t_{2A4}) + \mathbf{j}(-\Delta y_{2A3} + \Delta y_{2A4})}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \quad (6.86)$$

Legyen a két tükör és az osztótükör távolsága azonos:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{2A3} &= \Delta x_{2A4} = \Delta y_{2B3} = \Delta y_{2B4} = L \\
 \Delta t_{2A} &= \Delta t_{2B} = \frac{L}{c_0 \sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}}
 \end{aligned}$$

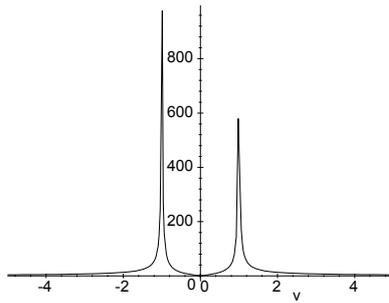
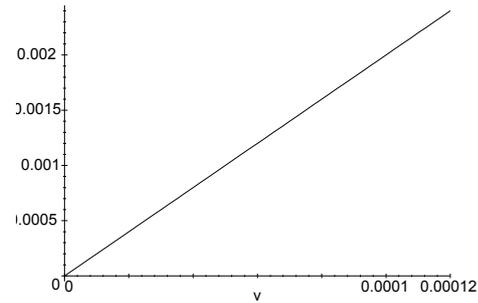
- Az elforgatott helyzetben **A** és **B** tükrök és az osztótükör között a fényvektorok hossza közti útkülönbség, minden a kísérletben szereplő fizikai méretek változatlanságára vonatkozó állítást az elforgatás során is érvényesnek tekintjük, hasonlóan a beállítási helyzetre tett megállapításhoz.
- Az elforgatott helyzetben **A** és **B** tükrök és az osztótükör között a fény sugar által befutott utak közti útkülönbség:

$$\begin{aligned} \text{Im} \left(\sum \mathbf{S}_{1EA} - \sum \mathbf{S}_{1EB} \right)_b &= \mathbf{i} \frac{v_F (\Delta t_{2B3} + \Delta t_{2B4}) + (\Delta x_{2B3} - \Delta x_{2B4})}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \\ &\quad + \frac{\mathbf{i} v_F (\Delta t_{2A3} + \Delta t_{2A4})}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} - \frac{\mathbf{j} (-\Delta y_{2A3} + \Delta y_{2A4})}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \\ \left| \text{Im} \left(\sum \mathbf{S}_{1EA} - \sum \mathbf{S}_{1EB} \right)_b \right| &= v_F \frac{(\Delta t_{2B3} + \Delta t_{2B4}) - (\Delta t_{2A3} + \Delta t_{2A4})}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \\ \left| \text{Im} \left(\sum \mathbf{S}_{1EA} - \sum \mathbf{S}_{1EB} \right)_b \right| &= \frac{2v_F \Delta t_A}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \end{aligned} \quad (6.87)$$

$$F_{VEKT} = \left| \text{Im} \left(\sum \mathbf{S}_{1EA} - \sum \mathbf{S}_{1EB} \right)_b \right| \quad (6.88)$$

$$F_{VEKT} = \left| 2 * v * 10 * \frac{1}{1 - v^2} \right|$$

$$ha \quad c_0 \equiv 1$$

Fényvektorok különbsége nagy v_F -nélFényvektorok különbsége kis v_F -nél.

$$\text{Im} \left(\sum \mathbf{S}_{1EA} - \sum \mathbf{S}_{1EB} \right)_b - \text{Im} \left(\sum \mathbf{S}_{1EA} - \sum \mathbf{S}_{1EB} \right)_e = 0 \quad (6.89)$$

Összefoglalva: a Michelson-Morley kísérlet eredménye, az interferenciacsíkok mozdulatlansága, megfelel az Euklidesz geometriának, mert mind az alap mind az elforgatott helyzetben a fényvektorok közti különbség zérus, feltéve hogy az **EUKLIDESZ-TRANSZFORMÁCIÓT** következetesen alkalmazzuk és kizárjuk a távolság meghatározó elemek bármiféle deformációját.

6.6. Kétdimenziós geometriák egyszerű alkalmazásai

A geometriai-fizikai eltérés abból fakad, hogy a három rendszer eltérő módon értelmezi a téridőbeli elmozdulás abszolút értékét :

- A Galilei geometriában a téridőbeli elmozdulás abszolút értéke megegyezik fény időben megtett útjával. (A térbeli elmozdulás képzetes volta az inercia rendszerek különbözőségéből eredő változékonyságot tükrözi, amely nem jellemzi a mozgást elsőrendben.)
- A Minkowski geometria szokásos interpretációja szerint a téridőbeli elmozdulás abszolút értéke a térbeli elmozdulás és a fény ez idő alatt megtett útjának négyzet különbségével egyenlő. Ez pedig nem más mint adott idő alatt megtehető maximális és a ténylegesen megtett út különbsége. Fény esetén ez a különbség zérus bármelyik inerciarendszerben. Az *Einstein-féle tereket* indefinit mivoltuk jellemzi. (Ha $v > c$ akkor „c”-vel megtehető minimális és a ténylegesen megtett út különbsége.)
- Érdekes felfigyelni egy sajátos formális átrendezés lehetőségére:
- A téridő vektor abszolút értékének négyzete a Minkowski rendszerben:

$$|\mathbf{s}_M|^2 = c^2 t_M^2 - x_M^2 \quad \text{ha} \quad ct_M > x_M$$

illetve

$$|\mathbf{s}_M|^2 = x_M^2 - c^2 t_M^2 \quad \text{ha} \quad x_M > ct_M$$

átrendezve

$$|\mathbf{s}_M|^2 + x_M^2 = c^2 t_M^2 \quad (6.90)$$

$$|\mathbf{s}_M|^2 + c^2 t_M^2 = x_M^2 \quad (6.91)$$

- azaz a téridőbeli elmozdulás és a térbeli elmozdulás összege egyenlő az időbeli elmozdulással, ha $(v < c)$
- illetve a téridőbeli és az időbeli elmozdulás összege egyenlő a térbeli elmozdulással (ha $v > c$).
- Ezek további formális művelettel a sebességekre adnak összefüggést legyen:

$$|\mathbf{s}_M| = s_M$$

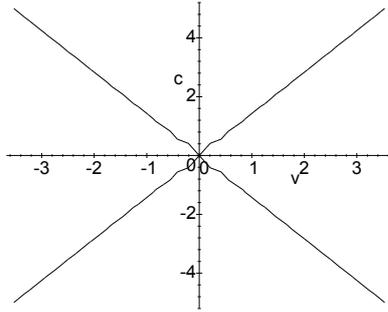
$$\begin{aligned} s_M^2/t_M^2 - x_M^2/t_M^2 &= -c^2/t_M^2 \\ u_M^2 - v_M^2 &= -c^2 \end{aligned} \quad (6.92)$$

továbbá

$$c^2 - v_2^2 = \mp u_M^2 \quad (6.93)$$

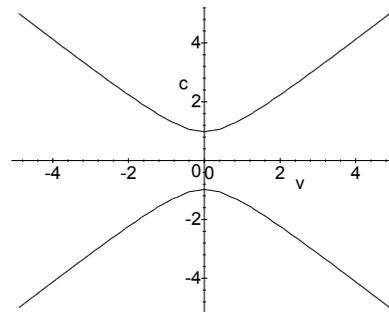
- Ezzel az „ $\mathbf{u-v}$ „ koordináta-rendszerben ábrázolva megkapjuk az érvényes geometria szokásos reprezentációját:

$$v^2 - c^2 = -v^2$$



A Minkowski sík nullkörei.

$$v^2 - c^2 = -1$$



A Minkowski síkon képzetes körei.

- A Minkowski geometria fázissíkjai: \uparrow
 - ami egy hiperbola, ahol a kauzális események az „asszimptoták„ felső és alsó, míg az akauzális események a két oldalsó részén helyezkednek el, ebben az esetben a fénysebesség hiperbola asszimptotája a térítő sebesség.
 - A fenti reprezentáció egyébként, amint az jól ismert a kvantált, korlátozott sebességű mennyiségekre vonatkozó megvalósuló és megvalósíthatatlan elrendezések ábrázolására alkalmas. (Az úgynevezett „z” transzformáció). Ez nyilvánvalóan a fénysebességre vonatkozó einsteini koncepció következménye.
 - Ugyanakkor az első elrendezésből előállítható egy sajátos invariáns transzformáló vektor kifejezés másik formája is, ha a fázisinformáció elvesztése nem okoz problémát (ilyen lehetséges a kvantummechanikában):

$$\begin{aligned} s^2 &= c^2 t^2 - x^2 \\ x^2 &= c^2 t^2 - s^2 \\ x &= (c^2 t^2 - s^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.94)$$

ha $x = |\mathbf{x}|$ ekkor a tér vektor:

$$\mathbf{x} = ct + \mathbf{i}s \quad (6.95)$$

Amiből a transzformáló vektor:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} - \frac{u}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \quad (6.96)$$

ahol az „ \mathbf{u} ” a két koordináta rendszer origója közti — \mathbf{K}_1 és \mathbf{K}_2 — a téridőbeli sebessége.

* Ebből a *Lorentz transzformáció* új formája adódik:

$$x_1 = \frac{s_2 + ut_2}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \quad (6.97)$$

$$t_1 = \frac{t_2 + s_2(u/c^2)}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \quad (6.98)$$

- Mindez arra utal, hogy a *Lorentz transzformáció* keretében a sebesség és a téridősebesség felcserélhető, (mivel az einsteini koncepció értelmében a fázisinformáció elveszíthető), azaz a sebesség fogalma sajátos invarianciával rendelkezik. **Továbbá az is következik, hogy a speciális relativitás elméletének korlátozása a térbeli sebesség helyett a téridőbeli sebességre is vonatkozhat, ami megszünteti a térsebesség önkényes korlátozását.**

Az *Euklidesz* geometriában a téridőbeli elmozdulás abszolút értéke a két komponens négyzetösszege pozitív definit. Ez a fogalom koherens az analízis és differenciálegyenletek kiépített apparátusával, amit a másik két geometria esetében nem igaz.

- Itt is érdemes felfigyelni a sajátos formai átrendezés lehetőségére:

A téridő vektor abszolút értékének négyzete:

$$|\mathbf{s}_E|^2 = c^2 t_E^2 + x_E^2 \quad (6.99)$$

átrendezve:

$$|\mathbf{s}_E|^2 - x_E^2 = c^2 t_E^2 \quad (6.100)$$

valamint :

$$|\mathbf{s}|^2 - c^2 t^2 = x^2 \quad (6.101)$$

- azaz a téridőbeli elmozdulás és a térbeli elmozdulás különbsége egyenlő az időbeli elmozdulással .
- valamint a téridőbeli elmozdulás és az időbeli elmozdulás különbsége egyenlő a térbeli elmozdulással.

Ezek további formális művelettel a sebességekre adnak összefüggést:

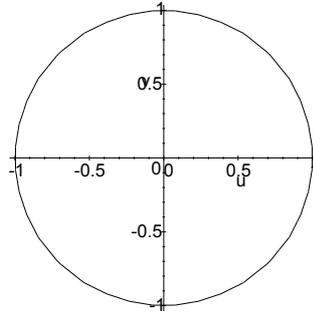
$$|\mathbf{s}_E| = s_E \quad (6.102)$$

- Ugyanakkor az elrendezésből előállítható egy sajátos invariáns transzformáló vektor kifejezés másik formája is:

$$\begin{aligned}
 s_E^2 &= c^2 t_E^2 + x_E^2 \\
 x_E^2 &= c^2 t_E^2 - s_E^2 \\
 |x_E| &= (c^2 t_E^2 - s_E^2)^{1/2} \\
 x_E/ct_E &= 1 - s_E/ct_E
 \end{aligned} \tag{6.103}$$

- ekkor a tér-vektor: mint az előzőben $\mathbf{x}^2 = c^2 t^2 - s^2$, mely osztva ct^2 -vel.

$$v^2 = 1 - u^2$$



Euklidesz féle kauzális sík: a kör.

$$\mathbf{x} = ct + \mathbf{i}s \tag{6.104}$$

Amiből a transzformáló vektor:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{(1 + u^2/c^2)^{1/2}} + \mathbf{i} \frac{u}{(1 + u^2/c^2)^{1/2}} \tag{6.105}$$

ahol a „u„ a téridőbeli sebesség.

Amiből az euklideszi transzformáció új formája adódik:

$$\mathbf{s}_{tE} = \frac{s + ut}{(1 + u^2/c^2)^{1/2}} + \mathbf{i} \frac{t + s(u/c^2)}{(1 + u^2/c^2)^{1/2}} \tag{6.106}$$

- Mindez arra utal, hogy az euklideszi transzformáció keretében is, a sebesség és a téridősebesség felcserélhető, azaz a sebesség fogalma sajátos invarianciával rendelkezik. Továbbá az is következik, hogy a speciális relativitás elméletének korlátozása a térbeli sebesség helyett a téridőbeli sebességre is vonatkozhat.

Mindez azért fontos, mivel a speciális relativitás elmélet keretében a négyesvektorok abszolút értékének állandóságának elve a legfontosabb rendező elv, mivel az az energia és az impulzus-megmaradás tapasztalatilag igazolt elvét, egyetlen megmaradási elvben egyesíti.

Ez az elv rendkívül fontos, azonban a Minkowski geometria eredménye problematikus.

Ugyanis:

- Mint az majd későbbiekben látható a Minkowski geometria abszolút értékének négyzete megegyezik az Euklidesz geometria négyzetvektorának valós részével.
- Az abszolút érték állandósága pedig a komplex amplitúdó és nem a valós energia-impulzus megmaradás törvényét fejezi ki.

Igy célszerű megvizsgálni, hogy a háromféle geometriában ez hogyan érvényesül: Legyen a *komplex energia-impulzus vektora* az általunk nyugalmiának tekintett *Ko* laboratóriumi koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{E} = \text{Re}\mathbf{E} + \mathbf{i}\text{Im}\mathbf{E} \quad (6.107)$$

ahol

$$\text{Re}\mathbf{E} = E \text{ a fizika szokásos energia fogalma} \quad (6.108)$$

impulzus reprezentációban

$$\text{Im}\mathbf{E} = p \quad (6.109)$$

a fizika szokásos impulzus fogalma.

- Ez azt jelenti, hogy a kiinduló *Ko* rendszert sem tekintjük abszolút nyugvónak (Iyen pont nincs is az Univerzumban), hanem ismeretlen „*w*” sebességgel rendelkezik, ebből származik a \mathbf{p} impulzus értéke. (A komplex energiavektor csak a sajátrendszerben azonos az energiával.)

Transzformálva a „*v*” sebességgel mozgó *KI* inercia rendszerbe:

- **Galilei geometria - Study számok:**

A komplex energia-impulzus vektor abszolút értéke:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}|_G &= E \\ \mathbf{E}_{tG1} &= \mathbf{E} * \mathbf{s}_{tG} \\ \mathbf{E}_{tG1} &= (E/c + \mathbf{i}p) * (1 + \mathbf{i}v/c) \\ \mathbf{E}_{tG1} &= E/c + \mathbf{i}p + \mathbf{i}Ev/c^2 \end{aligned} \quad (6.110)$$

A transzformált komplex impulzus vektor:

$$\mathbf{E}_{tG1} = E/c + \mathbf{i}(p + Ev/c^2) \quad (6.111)$$

$$[\mathbf{i}(p + Ev/c^2)]^2 = 0 \quad (6.112)$$

A transzformált komplex energia-impulzus vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{E}_{tG1}| = E \quad (6.113)$$

- Azaz a Galilei transzformáció esetében a komplex vektor abszolút értékének megmaradása a klasszikus energiamegmaradás elvét jelenti, másképpen a Galilei rendszer mindig a sajátrendszert veszi figyelembe.

Minkowski geometria - hiperbolikus komplex számok:

A komplex energia-impulzus vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{E}|_M = (E^2 - p^2)^{1/2} \quad (6.114)$$

$$\mathbf{E}_{tM} = \mathbf{E} * \mathbf{s}_{tM} \quad (6.115)$$

Legyen $E > |\mathbf{p}|$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{tM} &= (E + \mathbf{i}p) \left(\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \mathbf{i} \frac{v/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right) \\ \mathbf{E}_{tM} &= \frac{E + pv/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \mathbf{i} \frac{p + Ev/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (6.116)$$

Transzformált komplex energia-impulzus vektor abszolút értéke:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_{tM}|^2 &= \frac{(E + pv/c)^2 - (p + Ev/c)^2}{1 - v^2/c^2} \\ |\mathbf{E}_{tM}|^2 &= \frac{E^2(1 - v^2/c^2) - p(1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} \\ |\mathbf{E}_{tM}| &= (E^2 - p^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.117)$$

tehát a transzformációval szemben az energia abszolútértéke invariás

$$|\mathbf{E}_{tM}| = |\mathbf{E}| \quad (6.118)$$

A saját rendszerben:

$$E = m_0c^2 \quad v = 0 \quad \text{és} \quad p = 0 \quad (6.119)$$

$$Re\mathbf{E} = m_0c^2 \quad \text{és} \quad ImE = 0 \quad (6.120)$$

Azaz a Minkowski geometria invariáns az *energia - impulzus komplex vektor abszolút értékére*, amely az *impulzus reprezentációjú energia és impulzus különbségének megmaradását jelenti*. A különbség állandósága azt jelenti, hogy a test saját energiájának és ismeretlen energia - impulzusának különbsége állandó marad a koordináta transzformáció során, azaz a „*tényleges*” sajátenergia nagyobb mint a mért .

Mindebből az is következik, hogy azonos inerciarendszeren belül az impulzus növekedése korlátozott és nem érheti el a nyugalmi energia értékét, további növekedés lehetetlen. Abban a különleges esetben amikor $E = 0$ azaz $E/c = p + p$ a teljes energia megegyezik az impulzus nagyságával vagyis a fény nem más mint tiszta impulzus.

- Amint azt korábban láttuk a Lorentz transzformációnak egy másik alakja is, amely a $v > c$ esetre vonatkozik.

Legyen $p > E/c$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}| &= (p^2 - E^2)^{1/2} \\
\mathbf{E}_{tM} &= (E + \mathbf{i}p) \left(\frac{c/v}{(v^2/c^2 - 1)^{1/2}} + \mathbf{i} \frac{1}{(v^2/c^2 - 1)^{1/2}} \right) \\
\mathbf{E}_{tM} &= \frac{Ec/v + p}{(v^2/c^2 - 1)^{1/2}} + \mathbf{i} \frac{pc/v + E}{(v^2/c^2 - 1)^{1/2}} \\
|\mathbf{E}_{tM}|^2 &= \frac{(Ec/v + p)^2 - (pc/v + E)^2}{v^2/c^2 - 1} \\
|\mathbf{E}_{tM}|^2 &= \frac{(E^2 - p^2)(c^2/v^2 - 1)}{v^2/c^2 - 1} \\
|\mathbf{E}_{tM}| &= (p^2 - E^2)^{1/2} \tag{6.121} \\
|\mathbf{E}_{tM}| &= |\mathbf{E}| \tag{6.122}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2/c^2 - p^2 &= p^2 - E^2/c^2 \text{ ha } E = 0 \\
E^2/c^2 &= p^2 \\
E/c &= p \tag{6.123}
\end{aligned}$$

- Ez azt jelenti, hogy a sugárzássá történő átalakuláshoz olyan tér kell, amely a $p = E/c$ feltételt valahogy beállítja. Azaz az eredeti ismeretlen impulzust lecsökkentve a saját rendszert megvalósítja, ez miként a kísérletekből ismeretes a sztatikus elektromos tér, amely az ismeretlen „ v ” sebességet lassítással zérussá teszi.
- A két tartomány közti átmenethez előbb át kell alakulni sugárzássá, ezt biztosítja az elektron gyorsítási kísérletben, ahol 1 MeV-nál az elektron átalakul sugárzássá. Természetesen az ílymódon fellépő kvantumok átalakulhatnak ismét elektronná, amelyekre nézve $p > E/c$ azonban ilyenkor az elektron sebessége nagyobb c -nél, nem tud kölcsönhatásba lépni a környező anyaggal. Ugyanis a kölcsönhatás ideje kisebb mint a karakterisztikus idő és így a kölcsönhatásban résztvevő energia kicsi.

Euklidesz geometria-komplex számok:

A komplex energia-impulzus vektor abszolút értéke:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}|_E &= (E^2 + p^2)^{1/2} \\
\mathbf{E}_{tE} &= \mathbf{E} * \mathbf{s}_{tE} \\
\mathbf{E}_{tE} &= (E + \mathbf{i}p) \left(\frac{1}{(1 + v^2/c^2)^{1/2}} + \mathbf{i} \frac{v/c}{(1 + v^2/c^2)^{1/2}} \right) \\
\mathbf{E}_{tE} &= \frac{E - pv/c}{(1 + v^2/c^2)^{1/2}} + \mathbf{i} \frac{p + Ev/c}{(1 + v^2/c^2)^{1/2}} \tag{6.124}
\end{aligned}$$

Transzformált komplex energia-impulzus vektor abszolút értéke:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_{tE}|^2 &= \frac{(E - pv/c)^2 + (p + Ev/c)^2}{1 + v^2/c^2} \\ |\mathbf{E}_{tE}|^2 &= \frac{E^2(1 + v^2/c^2) - p(1 + v^2/c^2)}{1 + v^2/c^2} \\ |\mathbf{E}_{tE}| &= (E^2 + p^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.125)$$

tehát $|\mathbf{E}|_E = |\mathbf{E}_{tE}|$ azaz a transzformációval szemben az energia abszolútértéke invariás.

Az euklideszi térben a komplex energia abszolút értéke nem korlátozott azonban a komplex energia - impulzus vektor fázisszöge a „ $v = c$ ” értéknél $\pi/2$ ami különleges jelenségek fellépését jósolja meg. Nevezetesen, ha az energia-impulzus vektor fázisszöge $\pi/2$ akkor a vektor energiája rezgések formáját veszi fel. (A fénysebességgel haladó rendszerek különleges tulajdonságokkal rendelkeznek.)

Ez a különleges jelenség legegyszerűbb esetben nem más mint az elektromágneses térben veszteség nélkül haladó részecske. Mivel az ilyen részecskére elektromágneses térrel semmiféle hatást nem lehet gyakorolni. (Az ilyen speciális részecskékre legjobban a neutrínók és a fotonok hasonlítanak.)

Adódik a következtetés, hogy komplex energiák abszolút értékére mind a három geometria bizonyítja annak a transzformációval szembeni invarianciáját. Ez az invariancia tehát, nem fizikai törvény, mint azt *Einstein* a speciális relativitás elméletében állítja a *LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓ*-ról, hanem annak következménye, hogy a transzformációt (elforgatást) létrehozó vektor egységvektor, s így a forgatás az abszolút értéket nem változtatja meg.

- A fizikai jelenségeknél fontos, hogy a mérések során mi az észlelt mennyiség. Pontosabban az a fontos, hogy a számítások végeredményéből mi az amit valós jelenségként észlelünk ugyanis komplex jelenségeket nem tudunk csak egyes ritka, speciális esetekben észlelni. Ismert, hogy differenciál egyenletek megoldásai sok esetben komplex formában adódnak és a tényleges megoldásként a komplex forma valós részét tekintjük. Ez a valós rész a transzformációk során már nem állandó, mint a komplex amplitúdó.
- Egyik inercia rendszerből a másikba áttérve (kivéve a Galilei transzformációt) a jelenség nérhető (valós) része megváltozik. Az amplitúdó állandósága, amely a komplex energia-impulzus megmaradást reprezentálja, azonban arra utal, hogy a komplex jelenség képzetes része is létezik, az avanszált és a retardált formák összegeként, amelyek közül a retardált megoldást választották a kauzalitás betartása érdekében de azt eddigi módszereinkkel nem lehetett mérni.

7. fejezet

Michelson-Morley kísérlet I.

7.0.1. BEVEZETÉS

A fény éterhez viszonyított sebességének megállapítására sok kísérletet végeztek negatív eredménnyel. Ezen negatív eredmények közül pontosságával kiemelkedett a *MICHELSON-MORLEY KISÉRLET*, ennek magyarázatára korábban egyetlen lehetőség adódott, nevezetesen, hogy valamilyen fizikai jelenség következménye.

Közismert matematikai levezetések bizonyítják, hogy a kiinduló feltételezések és a matematikai - fizikai elemzés eredménye, az alkalmazott model alapján, a mérés nem lehet negatív eredményű, ezért nem volt más lehetőség mint a fizikai felfogás módosítása. Azonban elvileg nem kizárt, hogy a matematikai -fizikai model rossz és a várt effektus ezért téves elemzés eredménye. A mérések legfontosabb és legtöbbet tárgyalt része az interferencia jelensége.

7.1. INTERFERENCIA

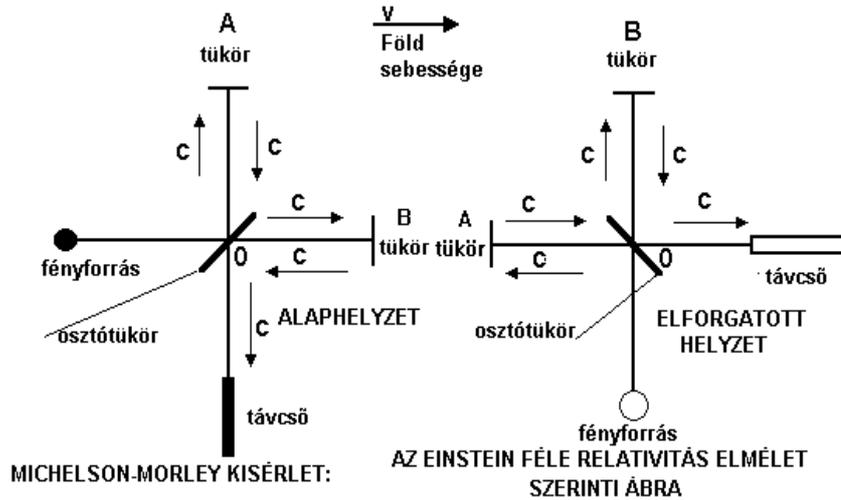
Az interferencia nem más, mint két fénynyaláb szuperpozíció nélküli találkozása,* ez történhet rendezetlen frekvenciájú és fázisú fényvel —szélessávú fényvel, ez a közönséges fehér fény— amely esetenként néhány gyűrűszerű csíkokból álló képet ad.

Az említett méréseknél az egyenlő beesésű interferencia görbéinek jelenségét használták fel, amelyek vastag párhuzamos lemezeken keletkeznek. Ez nagy útkülönbség esetén is használható képet ad, és a számítások szerint elegendő érzékenységgel rendelkezik a várt effektus — A Föld sebességének nagysága— kimutatására:

Michelson kimutatta, hogy az általa készített interferométer *Fourier transformációt* hajt végre a fényforrás síkján lévő intenzitásra vonatkoztatva, ennek következtében a távcsőben keletkező kép *Fourier transformált* képe a fényforrás intenzitásfüggvényének. (A fényforrás síkbeli henger-hullámokból álló intenzitás eloszlása a térfrekvenciák eloszlásaként jelenik meg.) Az eredeti kevésbé monokromatikus fényforrás, színszűrés segítségével $1/(T_2 - T_1) = \Delta f$ frekvenciasávja keskenyebbé válik, majd egy keskeny résen átvezetve térbeli korlátozással tovább szűkítik a nyalábot, így erősen koherens — A koherencia gyakorlatilag az interferenciaképességet jelenti. — térbelileg kiterjedt nyalábot kaptak.

*Ez a találkozás lehet vegyes is, azaz szuperponálódó és interferáló fénysugarak egyaránt jelen lehetnek.

Michelson -Morley interferométerének bemenő intenzitás függvénye egy keskeny rés diffrakciós képe, ha a kivágásra kör alakú rést használnak, akkor kör alakú nagyjából $\sin x/x$ alakú térbeli eloszlást kapunk bemeneti függvényként. Kimentő függvény a jellegzetes körökből álló a *Michelson -Morley* interferométerre jellemző kép.

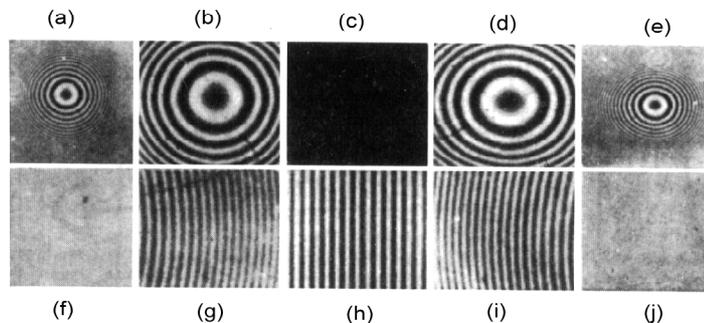


1. ábra.

A 2.számú ábrához érdemes a alábbi magyarázatot idézni:

- „....Ha az interferométer egyik tükkrét kis szöggel elfordítjuk, akkor a nyalábok egyes tartományai eltérő útkülönbség megtétele után találkoznak, ekkor egymás mellett váltakozva sötét és világos csíkokat figyelhetünk meg. Ha pedig a belépő nyalábot lencsével széttartóvá tesszük (síkhullám helyett gömbhullámmal világítjuk meg az interferométert), akkor sötét és világos gyűrűket észlelhetünk....”

([22] Erostyák János-Kozma László: Fénytan. 145.o.Dialog Campus Kiadó, 1999.)



MICHELSON INTERFEROMÉTER ÁBRATIPUSAI

2. ábra.

- Az interferencia csíkok keletkezésének alapvető formulája, úgy írható le, hogy két eltérő amplitúdójú-fázisú hullámfüggvényt összeadunk:

$$I = I_1^2 + I_2^2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (7.1)$$

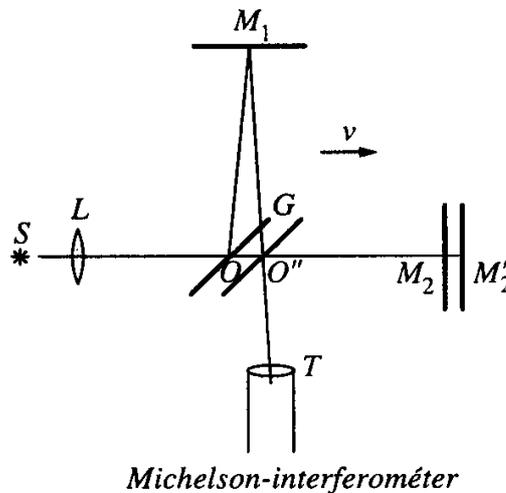
- ebből a $\cos \delta$ tag adja a csíkok rendszerét. A csíkok láthatóságát h arányszám szabja meg:

$$h = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1^2 + I_2^2} \quad (7.2)$$

Az interferencia keletkezését két alapvető részre lehet osztani:

1. Interferencia ugyanaból a világító pontból kiinduló különböző nyalábok közt.
2. Interferencia olyan nyalábok közt, amelyeket egyetlen nyaláb amplitúdójának több részre való bontásával hozunk létre.

Az interferencia állóképet hoz létre, ha a találkozó és szuperponálódó fényhullámok fázishelyzetei a mérés manipulációi révén nem változnak meg. A Michelson -Morley kísérlet során a fázishelyzet stabilitását a terjedési idő változására vezették vissza, azonban, ez azt a ki nem mondott feltételezést tartalmazza, hogy a fényhullám alapvető paraméterei a frekvencia illetve a hullámszám nem változnak meg a terjedés során. Mivel a várt interferencia-csíkok eltolódása, a fénysebesség megváltozása a *GALILEI transzfomáció* alkalmazásából következett, meg kell vizsgálni, hogy ezen transzfomáció miként hat a frekvencia - térfrekvencia jellemzőkre. Azonban a szokásos fénysugár ábrázolású *Michelson- Morley kísérlet* illetve a nyalábábrázolású kísérlet felületes ábrázolása nem ad magyarázatot a kísérlet eredményére, nevezetesen: az interferencia-csíkok mozdulatlanságára. Az elemi, egysugaras ábrázolások hibája abban a téves feltételezésben rejtőzik, hogy az interferenciát ugyanazon kiinduló elemi fényhullámból származtatják, de a nyalábábrázolású magyarázatok is elhanyagolják azt a tényt, hogy az interferenciaképes nyaláboknak éppen az a lényege, hogy bármelyik hullám bármelyik hullámmal képes interferencia csíkok létrehozására.



3. ábra.

- Van azonban egy általános zavar az interferencia tárgyalásának. Az elméleti tárgyalásnál, igen sokszor a könnyebbség érdekében a TEM modulusú síkhullámot veszik figyelembe és az ábrákon pedig egyetlen vonal jelzi a fénysugarat. Ez különösen feltűnik a Michelson-Morley kísérlet tárgyalásai során, azt a benyomást keltve, hogy a kísérlet során egyetlen sugár (esetleg néhány) alkotja az eredményként megjelenő interferencia képet.
- Amint azt az 1. ábra is mutatja a vízszintes és függőleges vonalak a 118. oldalon lévő 3. ábra szerinti formában alkothatnak interferencia képet. A következtetesen egyvonalas ábrák azt sugallják, hogy az amplitudóosztás következtében, akár egyetlen elemi sugár is alkothat interferenciát. Ezen hagyományos ábrázolás, ráadásul még magyarázható is, miként azt a 7.2.1.-pontban meg is tesszük, és az ilyen típusú ábrákról bizonyítható, hogy az interferenciakép elmozdulása valóban nem történik meg és ehhez nem szükséges **Einstein speciális relativitás elmélete**. Azt azonban hozzá kell tenni, hogy az egyvonalas ábrázolás lehet egy elemi síkhullám és lehet fénynyaláb, a szerzők általában nem tisztázzák a problémát.

7.1.1. Interferáló hullámcsomag mikrostruktúrája

A továbbiakban az interferenciakísérletek magyarázatához használatos síkhullám kép matematikai megfelelője került a számítások középpontjába^{††}, azonban mindenképpen tudni kell, hogy ez egy nagyon is merész absztrakció: nevezetesen a fénynyaláb helyettesítése egyetlen zérus sáv szélességű fénycsővel. Utalva *Einsteinnek* fénycső mellett repülésről szóló ismert megjegyzésére, annak az általános felfogásban változatlan képe, célszerű idézni *Vavilov* az interferenciával kapcsolatos, fontosabb megállapításait, amelyek a következő fontosabb fogalmak köré csoportosulnak: fénycső, szuperpozíció, interferencia és a fénycső határolása:

- „...Az interferencia módszer leegyszerűsített és csupán közelítőleg érvényes módszer; mégis nagy előnye, hogy a gondolatmenet és a számítás minden lépésnél szemléletes marad és néha egyszerű úton olyan nagyjelentőségű következtetések levonását teszi lehetővé, amelyekre szigorúbb módszerrel nehéz volna eljutni. Az interferencia fizikai elméletének alapját az az állítás vagy elv képezi, hogy a tér mindazon pontjaiban, amelyekben különböző természetes világító pontokból kiinduló fénysugarak találkoznak, az energiák szuperponálódnak. ...
- ...Az optikában az „interferencia”[†] fogalom azt jelenti, hogy a fénycső energiája találkozásuk helyén nem szuperponálódik. Ebben a meghatározásban nehézségek rejlenek, amelyek magával a fénycső fogalmával függenek össze. A fénycső előállításához ugyanis bizonyos határolásra, a világító pontból kiáramló fénycsőnek diafragmákkal való korlátozására van szükség. A határolás azonban elkerülhetetlenül elhajlást von maga után, vagyis megszünteti a szuperpozíciót az átengedett nyalábban s azt eredményezi, hogy váltakozva sötét és világos tartományokat észlelünk.....”

([23] Vavilov: A fény mikrostruktúrája 53-54. o.)

^{††}Ennek helytelenségével kapcsolatban, lásd 1.rész.....fejezet ...oldal ...bekezdés.

[†]Ennek helytelenségével kapcsolatban lásd.....

- „A teljesen monokromatikus fénynyaláb energiája zérus, vagyis természetes fényforrással tökéletesen monokromatikus fénynyaláb elvi okokból nem állítható elő.”

([24]Vavilov: A fény mikrostruktúrája. 74. o.)

- Azaz a síkhullámnak valójában nincs energiája. Ez azért fontos, mivel *Einstein* és *Michelson* korában még nem volt mesterséges fázisszinkronizált fénycső: a lézer, amely keskeny frekvenciasávban több hullámot koherensen kisugározva rendelkezik csoportsebességgel így energia átvitelrel is.
- Ugyanis az alábbi egyenlőség, amely a szuperpozíció és az energiátétel koherens sugarakra nem teljesül:[‡]

$$(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)^2 \neq (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2)$$

Továbbá:

- ” A fénynyalábok határolása (frekvencia és térbeli kiterjedés) - amely pedig a gyakorlatban teljesen elkerülhetetlen - az elemi interferencia elméletben, hibás eredményre vezet. A hiba annál nagyobb, minnél keskenyebbek az alkalmazott nyalábok....Az energia megmaradásának elve nemcsak a vizsgált esetben szenved sérelmet; ugyanezt találjuk minden más interferencia kísérletben is, mégpedig az interferencia tartomány szélén, ahol szuperpozíció elvétől való eltérések már semmivel sem kompenzálhatók....”

([25] Vavilov: A fény mikrostruktúrája. 82. o.)

- A *Michelson - Morley* kísérletben használt amplitúdóosztás típusú interferenciánál: „A visszaverődés, törés, és elhajlás nem szünteti meg koherenciát, de megváltoztatja a fénynyalábok interferencia képességét, amennyiben módosítja a nyalábok monokromatikus összetevőiben az elektromos vektor fázisát, amplitúdóját és irányát. Mozgó testeken való visszaverődés és törés alkalmával azonkívül a rezgések frekvenciája is megváltozik, de a nyalábok koherencia tulajdonsága megmarad.” És végül:
- „A szokásos interferencia kísérleteknél az interferencia jelenség mikrostruktúrája kiközepelődik és rejtve marad. Vizuális észlelésekhez meglehetősen nagy intenzitású fénynyalábokat alkalmaznak, nagyon kis intenzitásoknál pedig az interferenciaképet fényképezési úton rögzítik igen hosszú ideig tartó exponálásal. A kiközepelődések eredményeképp mindkét esetben szabályos szerkezetű interferenciateret kapunk.”

([26] Vavilov: A fény mikrostruktúrája. 82,111.o. Akadémia Könyvkiadó, Budapest, 1955.)

Mindebből az a következtetés vonható le, hogy az egyszerű síkhullám kép alapján történő számításból eredő fáziskép megváltozásra számító eredmény feltételezése, helytelen.Megjegyzendő, hogy a *Michelson-Morley* kísérlet a fény fázissebességének

[‡]Részleteiben lásd: Vajda János: AZ ENERGIÉTÉTEL SÉRÜLÉSE HULLÁMTEREKBE KORNÉTÁS KIADÓ 1998.

állandóságát igazolta, ami a későbbi megfontolások alapján nem bizonyult igaznak, viszont a csoportsebesség állandóságát - ami az információátvitel feltétele - nem igazolta a fenti kísérlet, ugyanis információátvitel nem történt fenti kísérletben. Márpedig moduláció nélkül információátvitel nem lehetséges, de habozás nélkül bizonyítékként kezelik a Michelson-Morley kísérletet a csoportsebesség állandóságának igazolására.

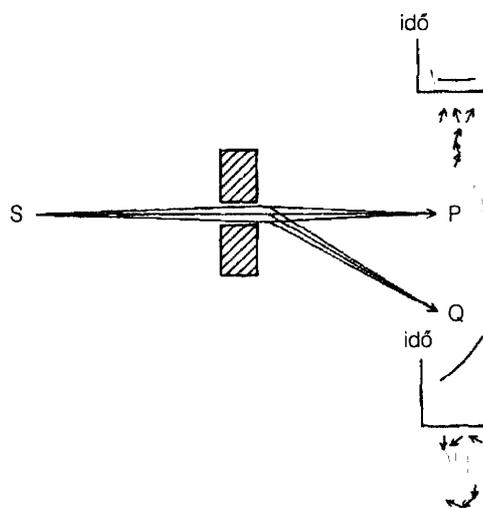
Ezt a jelenséget tehát eltérő ábrázolással lehet csak a valóságot ténylegesen tükröző módon ábrázolni és nem csupán az elforgatás előtti, hanem az elforgatás utáni ábrát is, készíteni kell: és ennek alapján lehet a szükséges számításokat elvégezni

A továbbiakban az interferenciakísérletek magyarázatához használatos síkhullám kép matematikai megfelelője került a számítások középpontjába, azonban mindenképpen tudni kell, hogy ez egy nagyon is merész absztrakció: nevezetesen a fényaláb helyettesítése egyetlen zérus sávszélességű fényhullámmal. Itt ismét célszerű idézni *Vavilov* az interferenciával kapcsolatos megállapításait:

- „A teljesen monokromatikus fényaláb energiája zérus, vagyis természetes fényforrással tökéletesen monokromatikus fényaláb elvi okokból nem állítható elő.”
- „A fényalábok határolása - amely pedig a gyakorlatban teljesen elkerülhetetlen - az elemi interferencia elméletben, hibás eredményre vezet. A hiba annál nagyobb, minnél keskenyebbek az alkalmazott nyalábok.”
- „Az energia megmaradásának elve nemcsak a vizsgált esetben szenved sérelmet; ugyanezt találjuk minden más interferencia kísérletben is, mégpedig az interferencia tartomány szélén, ahol szuperpozíció elvétől való lokális eltérések már semmivel sem kompenzálhatók.”

([27] Sz. I.Vavilov: A fény mikrostruktúrája.74-81.o. Akadémia Könyvkiadó, Budapest,1955.)

Az alábbi *Feynmann* idézet, megerősíteni látszik, azt amit korábban a fényaláb határolásával kapcsolatban *Vavilov* a kevésbé fejlett fényaláb felfogása alapján állított, ez a fényaláb felfogás *Heisenberg határozatlansági* relációján alapul és erősen támaszkodik a valószínűségi elméletre.



34. ábra. Ha a rést annyira szűkre összehúzzuk, hogy csak a legfelső fényutak haladhatnak át rajta, akkor a Q pontba is eljutnak a fotonok, mivel ezen útvonalakhoz tartozó nyilak nem már oltják ki egymást.

4./a. ábra.

(A 4/a ábra közvetlen folytatása a 4/b ábra, különállása pusztán technikai jellegű.)

Amikor a rés úgy beszűkül, hogy csak néhány igen közeli útvonalon tud átjutni rajta a foton, a Q pontba vezető utak nyilai is összeadódnak, mivel menetidejük közel azonos (34. ábra). Természetesen mindkét eredővektor rövid, a szűk résen csak kevés fény juthat át, viszont a Q-beli detektor azonos gyakorisággal jelez, mint a P-beli. Tehát, ha össze akarjuk húzni a fényt, hogy biztosak legyünk abban, hogy egyenes vonalban terjed, kifog rajtunk, és elhajlik.³

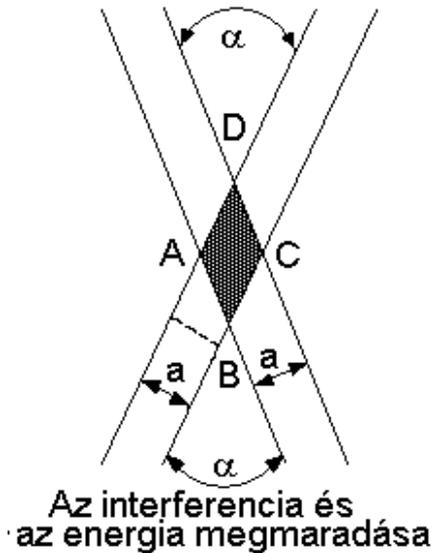
³ Ez az úgynevezett „határozatlansági elv” egyik megnyilvánulása: vagy azt tudjuk meghatározni, hogy hol megy pontosan a fény az akadályok között, vagy azt, hogy merre terjed mögöttük. A két dolgot egyszerre meghatározni lehetetlen. Szeretném most történelmileg elhelyezni a „határozatlansági elvet”: Amikor a kvantumfizika első nagy eredményei születtek, az emberek még a régi klasszikus felfogásokkal próbálták megérteni ezeket (például a fény egyenes vonalban terjed). Ekkor döbbenek rá, hogy a kvantumfizika jelenségeit nem értelmezhetik klasszikusan azok teljességében. Így született meg a „határozatlansági elv”. Ha megszabadulnak a klasszikus szemléletmódtól, és megpróbálják az általam sugallt elveket használni – összeadni egy esemény összes megvalósulási módjához rendelt valószínűségi nyilakat –, akkor nem lesz szükségük a határozatlansági elvre.

4./b. ábra.

([28] Richard Feymann: *QED* A megszilárdult fény. 57.o. Scalár Kiadó, Budapest, 2005.)

Így a Michelson - Morley kísérletben, használt interferenciánál is. Megismétlem, hogy a *Michelson-Morley* kísérlet a fény fázissebességének állandóságát igazolta, ami a későbbi megfontolások alapján nem bizonyult igaznak, a csoportsebesség állandóságát — aminek az információátvitel feltétele — nem igazolta fenti kísérlet. Információátvitel a fenti kísérletben semmiféle modulációs módon nem történt, márpedig moduláció nélkül információátvitel nem lehetséges, ugyanakkor habozás nélkül bizonyítékként kezelik a *Michelson-Morley* kísérletet a csoportsebesség állandóságának igazolására.

A részletes elemzéshez abból a korábbi általánosan elfogadott megállapításból indulhatunk ki, hogy az interferencia méréseknél használatos fény keskenysávú viszonylag nagy koherenciahosszal rendelkező inhomogén fénynyaláb.(Pl.: *Michelson* a "Hg spektrum zöld vonalának fényét még 540.000 hullámhosszúságnyi útkülönbség mellett is interferenciaképes volt."). Az ilyen interferenciára képes, koherens fénynyalábok, nem tökéletesen párhuzamosak, hanem valamely keskeny szög alatt találkoznak az interferencia térben, az eredő interferenciakép kétféle interferencia keveredéséből alakul ki:



5. ábra.

- párhuzamos azonos irányú fénynyaláb interferenciája
- párhuzamos ellentétes irányú fénynyaláb interferenciája

„Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a fénynyalábok egyenlő intenzitásúak, vagyis $A_1 = A_2$. Párhuzamos egyirányú fénynyalábok interferenciájánál az energiaáram a δ fázistól függően θ és A^2 között változik. Ha az energiaáramra $\equiv 0$ adódik ez az energia eltűnésének felel meg, ...Párhuzamos ellentétes irányú fénynyalábok interferenciájánál $A_1 = A_2$ fennállása esetén az energiaáram mindenütt zérus, az energia mindenütt helyben marad; ez azt jelenti, hogy *állóhullámokat* kapunk, amelyekben az állandó helyzetű elektromos csomópontoknak mágneses maximum helyek felelnek meg és megfordítva. Hogyha az általános $A_1 \neq A_2$ esetben $A_1 = A_2 + A'$ -t írunk, a párhuzamos ellenkező irányú fénynyalábok interferenciateret felfogható, mint állóhullám és A' amplitúdójú közösleges haladóhullám szuperpozíciója, ahol az utóbbinak nincs mivel interferálnia. Ugyanez a gondolatmenet természetesen különböző amplitúdójú, párhuzamos azonos irányú fénynyalábok interferenciájára is alkalmazható; az interferenciateret ilyenkor úgy fogható fel, mint egyenlő amplitúdójú és azonos irányú hullámok interferenciájának, valamint haladó hullámnak a szuperpozíciója. Ezek szerint **minden intreferenciakép** úgy is értelmezhető, mint állóhullám, továbbá a szó szoros értelmében vett interferencia (párhuzamos azonos irányú fénynyalábok interferenciája), valamint nem interferáló haladó hullám szuperpozíciója. *E felfogás szerint a legtöbb interferencia kísérlet, amelyben váltakozó sötét és világos csíkokat észlelünk nem egyéb, mint annak kísérleti bizonyítéka, hogy a szó szoros értelmében vett interferencia és az álló hullámok egymás mellett lépnek fel.*

A fényenergia szuperpozíciójától való eltérés az interferencia térben természetesen, egyik valóságos kísérletnél sem sérti meg az energia megmaradása elvét.[§]

Az interferenciater periódikus szerkezete azt mutatja, hogy ha egyes tartományokban a szuperpozíciótól eltérések észlelhetők, ezeket a szomszédos tartományokban ellentétes irányú eltérések olyanképpen kompenzálják, hogy az egész interferencia térre számított energiaintegrál az egymással kölcsönhatásba lépő fénynyalábok energiáinak összegével egyenlő. Az interferencia eredményeképpen az energiaeloszlás megváltozik, anélkül, hogy az energia megmaradásának elve érvényét vesztené

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a *mértanilag élesen elhatárolt nyalábok* ¶fogalmának szigorú és következetes alkalmazása már önmagában is el-
lentmond az enegiamegmaradás elvének és ahhoz a paradox

megállapításhoz vezet, hogy ennek az elvnek nem szabad fennállnia. Messe egymást két élesen határolt a szélességű párhuzamos koherens nyaláb igen kis α szög alatt. Ekkor az $ABCD$ tartományban (3. ábra) interferencia jön létre. Legyen az egymást metsző nyalábok fázisa a B és C pontokban és az egész BC vonal mentén egyenlő, akkor egyenlő intenzitású nyalábok esetén az energia a BC vonal mentén kétszer akkora, mint a szuperpozíciónak megfelelő érték. Hogy a szuperpozíciótól való eltérést az $ABCD$ tartományon belül ellenkező előjelű eltérések kiegyenlíthessék, az A pontban egymást metsző nyalábok útkülönbségének legalább $\frac{\lambda}{2}$ -nek kell lennie. Ez az útkülönbség

$$BA - B'A = a \left\{ \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\tan \alpha} \right\} = \frac{2a \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}$$

Ha $BA - B'A = \frac{\lambda}{2}$ és az a igen kicsiny, akkor

$$\alpha = \frac{\lambda}{a}$$

Más szóval az energia megmaradásának elve csak úgy állhat fenn ha

$$\alpha \geq \frac{\lambda}{a} \quad (7.3)$$

különben az energia megmaradásának elve nem teljesül. Így pl., ha $\alpha = 0$, akkor az energia vagy eltűnik a nyalábok átfedésének egész tartományában vagy pedig kompenzáció nélkül jelenik meg. Ennek a paradoxonnak a magyarázata abban a téves nézetben keresendő, mely szerint a fénynyalábok élesen elhatárolhatók és irányuk pontosan megadható** „Párhuzamos,, nyalábban haladó sugarak iránya fizikailag nem adható meg a (8)-nál nagyobb pontossággal. A tökéletesen párhuzamos nyaláb ugyanolyan fikció, mint a tökéletesen homocentrikus nyaláb, amely annál jobban közelíti

[§]Ez koherens nyaláboknál nem minden esetben teljesül lásd 3. megjegyzés.

¶Például a vonalszerű elemi fénysugár.

**Pontosan ez történik a Michelson-Morley kísérlet egyetlen elemi síkhullám esetében, amelyet közel 120 éve ezzel a felfogással tárgyalnak.

meg a valóságot, minnél nagyobb a nyaláb a keresztmetszete. Ezzel szemben minnél kisebb az a , annál jobban elmosódnak a nyaláb határvonalai.

Így például, ha λ szélességű fénynyalábot akarunk előállítani, úgy az α határozatlanságának megfelelő szög az egységénél nagyobb lesz. Ezt az elhajlási kísérletek igazolják is.”

([29]Idézett mű: Vavilov: A fény mikrostruktúrája.79-81.o. lásd előbb.)

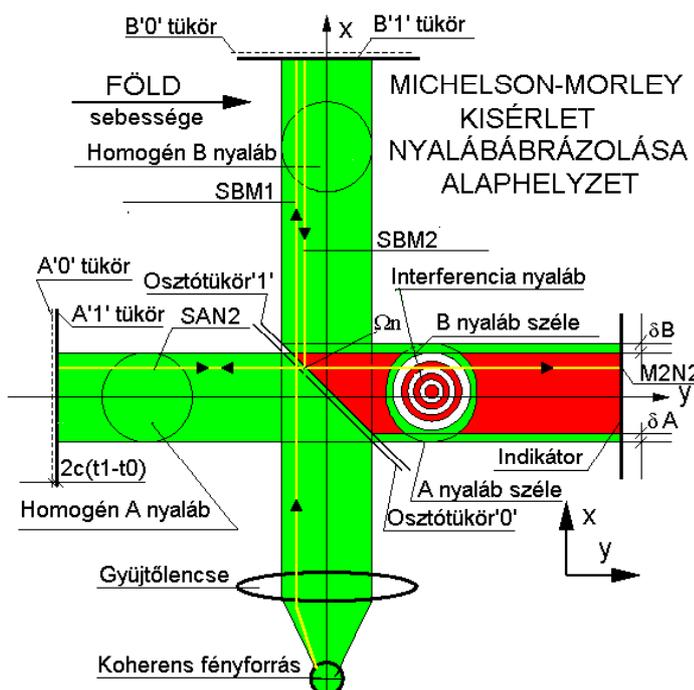
A fentiek következtében a szokásos egy elemi fénysugárból —amely egyben a síkhullám is— álló interferencia ábrázolásából álló rajzok, valójában nem ábrázolják a Michelson-Morley kísérletet a maga valóságában, hanem téves és megtévesztő számítási eredményeket adnak, ami kétséges teszi az egész Einstein-féle speciális relativitás elméletet.

7.2. Michelson-Morley kísérlet nyalábábrázolása

Az alapvető különbség a hagyományos és az általam kialakított nyalábábrázolás között: a hagyományos felfogásnál amplitúdóban kettéosztott elemi hullámok síkhullámok részei interferálnak míg a nyalábábrázolásnál, gyakorlatilag végtelen sok elemi hullám amplitudóját osztják ketté és az így keletkezett koherens nyalábok eltérő 3D hullámai interferálnak a mérés eredményeként.

Alapvetően abból kell kiindulni az interferencia kísérleteknél, hogy nem elemi fénysugár — egyetlen illetve kettő — találkozik és szuperponálódik az interferencia helyén, hanem igen sok. Ugyanis az interferencia helyén néhány tized milliméter átmérőjű sugarak szuperponálódnak, ami többmillió **3D** elemi hullám jelenlétét jelenti. Ezen az interferáló elemi hullámok legfőbb jellemzője, hogy koherensek, azaz a két nyaláb bármelyik két elemi hulláma képes az interferenciakép egy pontjának létrehozására. Tehát az interferenciakép létrehozására nem minden pontja szükségképpen ugyanazon hullámból kiinduló hullámból jön létre, hanem a sugárnyaláb más-más két hullámból. Ennek következtében a klasszikus-hagyományos ábrázolásai (lásd 8.1; ...8.7) helytelenül írják és ábrázolják *Michelson-Morley kísérletét* aminek következtében az az eredmény adódik, hogy az interferenciaképnek az interferométer 90° -os elforgatása után el kell tolódnia, ha a *Galilei transzformáció* igaz (lásd:9.1;9.4 ábrák). Azonban az eltolódás, az ismételten (egyre pontosabban végrehajtott kísérletek) során soha nem jött létre, levonták a következtetést, hogy a *Galilei transzformáció* nem helyes a fénysebesség közeli mozgások tartományában, helyette más geometria és transzformáció alkalmazása szükséges, melynek egyik alapvető tétele a fénysebesség állandósága.

Ennek az ellentétnek feloldására született meg *Einstein speciális relativitás elmélete*, melynek két alapvető posztulátuma a *fénysebesség állandósága* és a *Lorentz transzformáció*. Ismeretes, hogy *Einstein* maga nem foglalkozott különösebben a *Michelson-Morley kísérlettel*, és a speciális relativitás elméletét inkább gondolatkísérletekre és elméleti definíciókra — tér és idő — valamint matematikai levezetésekre alapozta, továbbá a már korábban megszületett *Lorentz transzformációra*. A geometriára is csak akkor lett igazán szüksége, amikor a négydimenziós *Lorentz transzformáció* bevezetése vált szükségessé. Ekkor alkotta meg számára *Minkowski a négydimenziós Lorentz transzformációt —négydimenziós transzformáló tenzort — és annak geometriai tükrét a Minkowski geometriát, amely már hiperbolikus geometria volt.*



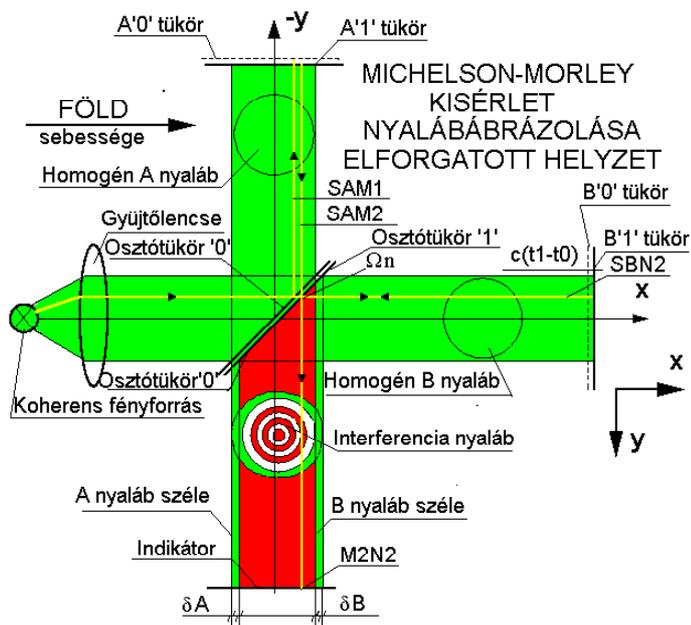
6. ábra. A klasszikus Michelson-Morley kísérlet. I.

A 7.6 és 7.7. ábrák a megszokottól eltérőek, a valósághoz hasonlóbbak. Nem egyetlen sugárral készültek, hanem (természetesen) erősen torzított **3D elemi hullámok** nyalábjával.

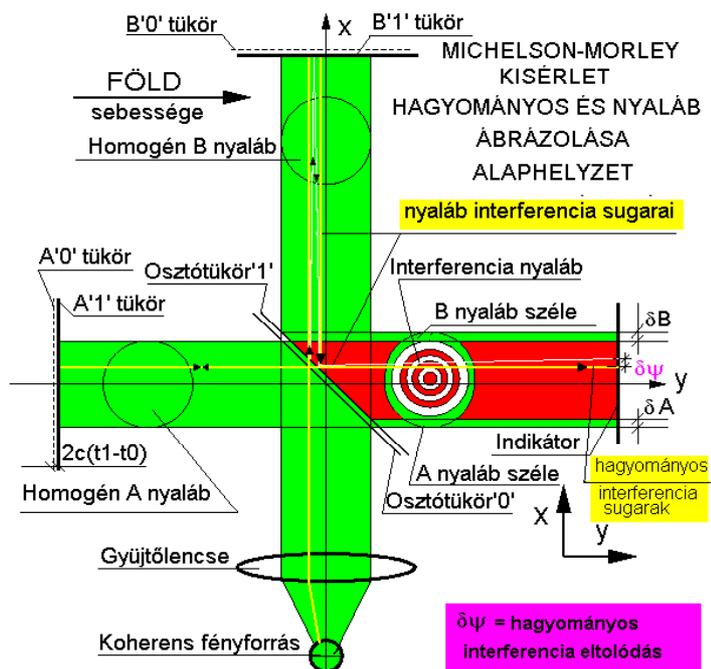
Michelson-Morley kísérlete már ránézve is döntő a különbség a klasszikus-hagyományos ábrákhoz képest, de a döntő az, hogy a 7.6.és 7.7.ábrák sugárnyalábjaiban lévő elemi sugarak **koherensek, azaz fázisuk és frekvenciájuk azonos.**

Ennek következtében a "B'1'" tükörről visszaverődő — sárgával jelölt — sugarak közül, nem az "SBM1" jelű sugár alkot interferenciát, hanem a vele párhuzamosan haladó és azonos fázisú "SBM2" (koherens) sugár az "A'1'" jelű tükörről visszaverődő "SAN2" sugárral, az "Osztótükör '1'" Ω_n pontjában találkozáva interferálódik, és az "SBN2" jelű sugárral alkotja az "M2N2" jelű interferenciapontot.

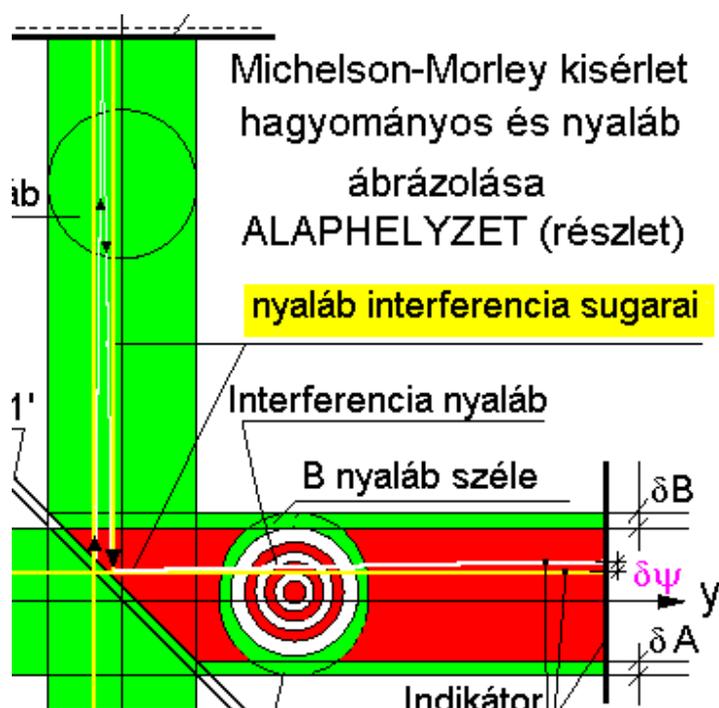
Amennyiben az ábrát 90° -al elforgatjuk, az "SAM1" sugár verődik vissza és halad egyenes pályán, majd az "Osztótükör '1'"-n ugyanazon Ω_N pontban találkozik az "SBN2" és mivel $\nabla\varphi = \nabla\varphi'$, azaz SAM2 ugyanazon a pályán halad, mint az előző helyzetben és SAN2 ugyanazon a pontban fordul 90° -ot mint az elforgatás előtti helyzetben az indikátor ugyanazon "M2N2" hoz létre interferenciapontot mint az elforgatás előtti állapotban. Mivel ezek a tények mind az "A nyaláb" mind a "B nyaláb" minden összetevőjére vonatkozik kivéve a két nyaláb szélét, ezért az interferenciakép nem fog a forgatás során elfordulni, ellentétben a hagyományos ábrázolásban tapasztaltakkal. Azaz elegendő az *Euklidesz geometriában* megrajzolni, a kísérletet, mert a Föld sebességével párhuzamos tükör, ami a **Föld** koordinátarendszeréhez van rögzítve nem ragadja magával a fényhullámokat, hanem a koordinátarendszerhez rögzített tükörök és a közöttük áramló fénynyaláb közti csatolás hiányában, a fénynyalábok arébb csúsznak.



7. ábra. A klasszikus Michelson-Morley kísérlet. II.



8. ábra. A klasszikus és a nyalábábra összevetése. I.



9. ábra. A klasszikus és nyalábábra részletének összevetése.

A koordinátarendszerben a fényre–elektromágneses hullámra, csupán a gravitációs hatás gyakorol erőhatást,^{||} mivel nincs valós tömege, ennek következtében a *Galilei transzformációban lévő sebességek összeadódása, csak valós tömegpontok esetén érvényes, azaz a fénysebesség és a Föld sebessége tömegpont hiányában nem tud szuperponálódni. A tömegpont ugyanis azzal a fontos tulajdonsággal rendelkezik, hogy minden sebességet ami rá hat impulzusként, tömegében tudja tárolni és ezáltal tudnak a különböző sebességek a tömegpontban szuperponálódni. Viszont új geometria bevezetésére sincs szükség.*

Mindez azt jelenti, hogy a Michelson-Morley kísérlet nem alkalmas a Galilei transzformáció elvetésére. Ehhez hozzá kell tenni azt is, hogy korábban Newton a maga elméletének megalkotásakor csak geometriai bizonyításokat alkalmazott, és a differenciálszámítást csupán utólag a könnyebb manuális számítás céljára alkotta meg, de elméletét a geometriára alapozta, mint elsődlegesen bizonyító erejű elméleti módszerre.

7.2.1. A M.-M. kísérlet nyaláb és klasszikus ábrájának összevetése

Ha a két kísérletet ugyanazon a 8. ábrán ábrázoljuk, azonnal feltűnik a kettő különbsége és az is, hogy míg a nyalábábrázolásnál nincs elmozdulás a klasszikusnál van. 9. ábrán jól látható, hogy a sárga színű nyaláb interferencia vonalai esetén nincs elmozdulás, míg a fehérrel ábrázolt hagyományos interferenciánál van interferencia elmozdulás. A különbséget „B nyaláb és az interferencia nyaláb” adja melyet a 8. ábrán lehet jól látni. A „ $\delta\psi$ ” távolság az elmozdulás nagyságát mutatja.

^{||}A Föld sebessége még a Naprendszer sebességével együtt sem gyakorol lényeges erőhatást a fényre, csak abban az esetben ha igen sűrű közegben halad, ami a Michelson-Morley kísérletben nem állt fenn. A műszer érzékenységének illusztrálására a ~ 100 m-nyire elvégzett dobantást is jelezte a műszer ez azonban a mérés egészére hatott és nem a két külön karra, tehát érdektelen. Az ilyen impulzusszerű sebességváltozás mindkét karra azonos hatást gyakorolt, mert nagytömegű alap az alulról érkező impulzusszerű gyorsulást szétosztotta minden irányban azonos mértékben.

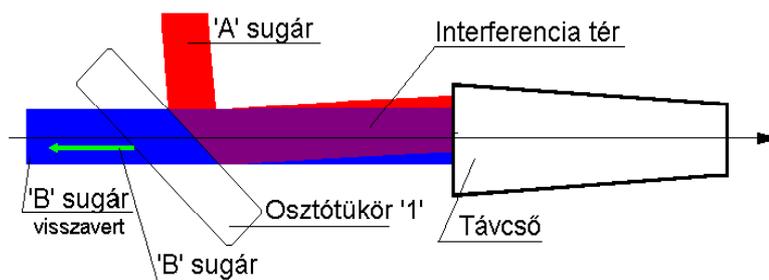
Ugyanakkor a „ δA és a δB ” távolságok mérése, mivel azok az osztótükröknek a Föld-sebesség/fénysebesség arányától függenek a mérés eredeti céljának kiválóan megfelelnek.

A klasszikus mérés döntő eleme az osztótükör „0” helyzetéből az „1” helyzetbe való elmozdulása, amely ha 10 méteres karhosszal számolunk:

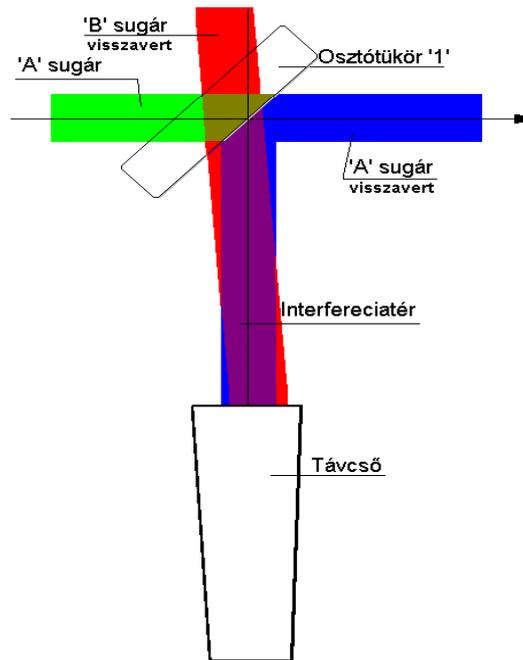
$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \frac{20}{3 \cdot 10^8} \approx 6.66 \cdot 10^{-8} \text{ sec} \\ \Delta l_{tk} &= 3 \cdot 10^4 \times 6.66 \cdot 10^{-8} \approx 2 \text{ mm} \end{aligned} \tag{7.4}$$

7.2.2. A hagyományos ábrázolás interferenciájának értelmezése

A hagyományos ábrázolásnál az interferencia jelensége és tényleges fellépése az osztótükör „1” helyzetében a tükrön jön létre és nem az indikátorként jelzett felületen. Mint azt a Galilei-féle ábrázolás mutatja a 9.2. ábrán ahol az **Alaphelyzet** (148.o.), 9.3. ábrán az **Elforgatási helyzet** (148.o.) jelentős eltolódása látható, ez lehetett az eredeti kísérlet értelmezésének alapja is. De nem volt semmiféle eltolódás, így ezeket a rajzokat tévedésnek kell minősíteni, illetve az eltolódás „virtuális” mivel a valóságban az nem más, mint a fénysugár elméleti vetülete a mozgó mérési koordináta rendszerben rögzítve. Az interferencia az osztótükrön jön létre, ezt a számítások két formában is bizonyítják. Az osztótükör utáni fénynyaláb szétnyílása már nem tartozik a kísérlet lényegéhez. (Nem teljesen mellékesen figyelembe kell venni, hogy a rajzok torzok és a megfigyelő távcsöve igen közel van az 1.számú osztótükrőkhöz ami a szétnyílást lényegesen csökkenti.) Másrészt a függőleges tükörről visszaverődő fény nem az eltolódott **függőleges tengelyen haladva** verődik vissza, hanem az **eredeti függőleges tengelyen**, ennek következtében a centrális sugarak, melyek egyben az interferenciakép középpontjai is, nem mozdulhatnak el és így elő sem fordulhat, hogy függőlegesen haladó sugár és a visszaverődő sugár ferdén haladjon. Itt egyedül az **osztótükör elmozdulása lényeges**, mivel a vízszintesen visszaverődő sugár, eltolódva halad a függőleges mellett. Az eltolódás nagysága közelítve **2 mm**.



10.ábra. A Galilei-féle alaphelyzet virtuális képe.



11. ábra. A Galilei-féle elforgatás virtuális képe.

A megfigyelő távcső nagyításának nagyságrendje ≈ 100 , ebben az esetben a szemlencsén látott kép felvéve $d \approx 10 \text{ mm}$ -re, a bemenetre visszavetítve 10^3 mm , amiből a tárgylencse 200 mm -es képet vág ki, ez a bemeneten $d \approx 0.2 \text{ mm}$ átmérőjű kör. Azonban van egy lényeges zavaró körülmény is: beállításkor a két reflektáló tükör ferdén is beállítható, ekkor a visszavert sugár $\sim 0.0002r$ ferdeséggel éri el az osztótükört „1”-et és 6. ábra szerinti kevert interferencia képet kapjuk, aminek csupán a kontrasztja jelzi, a hibás beállítást. Összefoglalva a klasszikus felfogásban is miként azt a két interferencia ábra -8. és a 9.-is mutatja, a keletkező képen valójában nem következik be az eltolódás.

7.3. Koordináta transzformációk II.

A kísérleti fénynyalábot a számítások egyszerű elvégezhetősége érdekében általánosan, de helytelen módon, modellezik a síkhullám modellel, amely a *MAXWELL* egyenletekből származó hullámegyenletek egyik megoldása. Egydimenziós esetben a következőképp írható komplex alakban:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-i(\omega T - kX)} \quad (7.5)$$

A fenti komplex alak az állónak tekintett egy dimenziós tér és a segéddimenzióként bevezetett idődimenzió *Galilei*-koordinátarendszerében érvényes. Abban az esetben, ha másik „ v ” sebességgel mozgó rendszerre kívánunk áttérni, akkor a párhuzamosan és azonos irányban különböző sebességekkel mozgó koordináta-rendszerek \equiv inercia-rendszerek esetén az egydimenziós *GALILEI* transzformációt alkalmazhatjuk, azaz:

$$X = x + vt \quad (7.6)$$

$$T = t \quad (7.7)$$

A transzformáció formuláit behelyettesítve az 7.5. exponenciális tag kitevőjébe a következőket kapjuk:

Pozitív irányú sebesség esetén: \mathbf{v}

$$x_p = k_0[c_0 t - x/c_0 - vt/c_0] = k_0 \left[-c_0 t - \frac{x + vt}{c_0} \right]$$

$$x_p = k_0 \left[-c_0 t - \frac{x + vt}{c_0} \right] \quad (7.8)$$

Negatív irányú sebesség esetén: $-\mathbf{v}$

$$x_n = k_0[c_0 t - x/c_0 + vt/c_0] = k_0 \left[k_0(c_0 t - \frac{x - vt}{c_0}) \right]$$

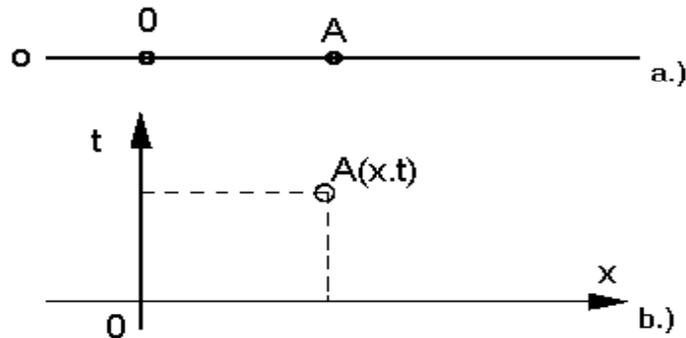
$$x_n = k_0 \left[k_0(c_0 t - \frac{x - vt}{c_0}) \right] \quad (7.9)$$

A fényterjedés iránya meg kell hogy egyezzen az „ x ” tengely irányával, míg a „ v ” sebesség „ v_x ” vetületével kell számolni az előjel értelemszerű figyelembevételével.

Mint a 7.7 és 7.8. alatti formulákból kitűnik a *GALILEI* transzformáció azt jósolja, hogy a fény sebessége más - más koordináta-rendszerben vizsgálva változó nagyságú, ennek a feltevésnek ellenőrzésére volt hivatva többek között a *MICHELSON - MORLEY* kísérlet. A kísérlet negatív eredménye tehát megkérdőjelezte a *GALILEI* transzformáció helyességét és alkalmazhatóságát.

Azonban már itt figyelembe kell venni, hogy a *GALILEI TRANSZFORMÁCIÓ* sajátossága, hogy a *sebesség* mint vektormennyiség nem megmaradó mennyiség, az eltérő sebességű inerciarendszerekben, ebben a transzformációban a megmaradó mennyiség a *gyorsulás* és bizonyos feltételek esetén az *erő*. Ezért ha a fénysebesség állandóságát kívánjuk vizsgálni, akkor transzformáció során a gyorsulást, a sebességváltozás függvényét kell vizsgálni. Ez a vizsgálat viszont arra az eredményre vezet, hogy a transzformáció pillanatában egy *dirac* $\delta = v_{transz}$ -nyi sebességváltozás lép fel, azaz egy *disztribúció*, mint gyorsulás, majd a továbbiakban a *gyorsulás* $\equiv 0$, vagyis a jelenségek sebessége nem változik meg, mivel a valós jelenségek körében a végtelen rövid idő alatt bekövetkező változások lehetetlenek és csupán a szemléleti-számítási mód lépteti be a sebesség változást, mint jelenséget.

Szükségesnek látszik néhány alapvető tényt megemlíteni, amely a *Gallilei geometriával* kapcsolatban a mechanika területén félremagyaráztak:



12. ábra. Egydimenziós Galilei geometria t segédkoordinátával.

- A háromdimenziós térgeometriából származtatható a kétdimenziós *Galilei síkgeometria*, melynek forgatási transzformációi és a forgatás következtében létrejövő változásokat az 7.10 formula mutatja:

$$\begin{aligned} X &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + a \\ Y &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \end{aligned} \quad (7.10)$$

– ahol „ α ” az „ x ” és „ X ” tengelyek által bezárt szög, „ a ” és „ b ” pedig a két origó közti eltolás.

- A 7.10 formula mutatja, hogy nem csupán, a forgatás szerepel rajta, hanem „ v ” sebességű és irányú haladás is amely a két koordinátarendszer egymáshoz képest végez. Ezen haladás következtében további kiegészítésekkel szükséges ellátni a fenti formulákat:

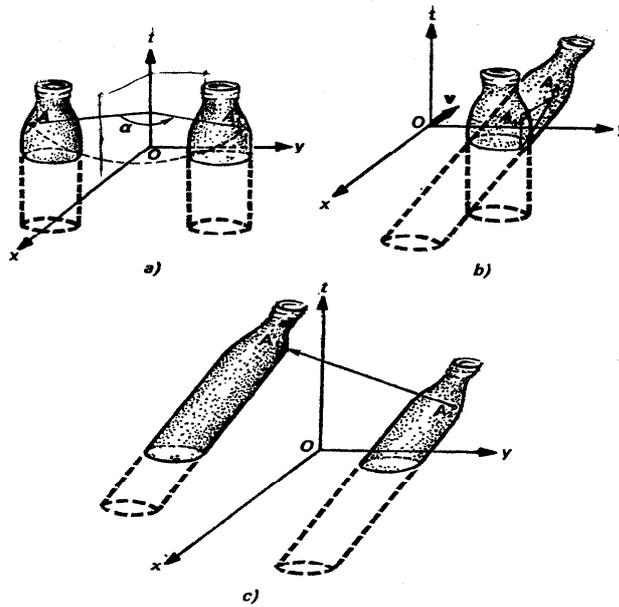
$$\begin{aligned} X &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + (v \cos \beta)t + a \\ Y &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + (v \sin \beta)t + b \\ T &= + t + c \end{aligned}$$

- A kétdimenziós térgeometriából származik az egydimenziós geometria, amely természetszerűleg, csak a meglévő egyetlen ténnyben haladhat, mint koordináta rendszer. Mint az természetszerű ilymódon az „ x ” tengelyen haladó pont „ v_p ” sebességéhez hozzáadódik az „ x ” tengely „ v ” sebessége is, továbbá az ábrázolás kezelhetősége érdekében a „ t ” időkoordinátát az „ x ”-re merőleges segédponttal a „ t ” segédkoordinátán ábrázoljuk. Ekkor mint azt az ábra mutatja megkapjuk a speciális relativitás elmélet kedvenc téridő jelölését, amire igaz a *Galilei téridő* koordináta-rendszer elnevezés és a hozzátartozó *Galilei-féle téridő transzformáció*:

$$\begin{aligned} X &= x + vt + a \\ T &= t + b \end{aligned}$$

- Az egydimenziós *GALILEI téridő* rendszer bővíthető kétdimenziós térre, melyet háromdimenziós téridő rendszernek nevezhetünk, amelybe éppen beágyazható a *Michelson-Morley kísérlet* geometrai tárgyalása. Ennek transzformációs formulái:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ t_1 &= + t_1 \end{aligned} \quad (\text{a.})$$



2.8 ábra

1.~ ábra. 13. ábra. 2+1 dimenziós Galilei transzformáció.

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 + (v \sin \beta)t_1 \\
 y_2 &= y_1 + (v \sin \beta)t_1 \\
 t_2 &= + t_2
 \end{aligned}
 \tag{b.)}$$

$$\begin{aligned}
 x' &= x_2 + a \\
 y' &= y_2 + b \\
 t' &= t_2 + d
 \end{aligned}
 \tag{c.)}$$

- ahol 13. ábrán:
- a.) a t tengely körüli forgatás ;
- b.) nyírás egy meghatározott vektor irányába
- c.) az (a,b,d) vektorral való párhuzamos eltolás.

- A fenti elméleti megfontolás valójában a Galilei transzformáció azon tulajdonságából fakad, hogy egy tetszőlegesen mozgó pont leírásának differenciális alakjára áttérve, sorbafejtve $s(t)$ függvényt legegyszerűbb esetben egy soktagú Taylor sort kapunk, melyben mennél nagyobb rendű deriváltak lépnek fel annál erősebben görbült a pálya, azonban a korabeli mechanika, amely a

pálya, sebesség, gyorsulás illetve az impulzus, erő, gyorsulás változásait vizsgálta, maximum az *út-idő* függvény harmadik deriváltját vette figyelembe, míg a *Galilei transzformáció a harmadik deriváltat* nem viszi át, (lásd a 8. fejezet), aminek következtében a gyorsulás invariáns mennyiségé válik, s ezért a tömeg tehetetlensége is invariáns mennyiség, ami az egyenesvonalú állandó sebességű koordináta rendszerek ekvivalenciáját és egyenértékűségét jelenti, azaz a megszorítással, hogy az ilyen koordinátarendszerek sajátsebesség vektorainak párhuzamosaknak kell lenniök. Az energiaátadás azonban nem kezelhető végtelen rövid és/vagy zérus idejű folyamatként, mivel a fotonok véges hosszúsága miatt, minimum időként T_λ időt figyelembe kell venni, ez azonban már nem *disztribci* hanem véges hosszú időtartamú energiaátadás, aminek azonban nincs tényleges forrása, annál kevésbé, mivel jelen tudásunk szerint a fény sebessége a közeg törésmutatójának vagy a gravitációs tér hatásának következtében változik csak meg, a kísérlet azonban levegőben zajlott így a fénysebesség megváltozásának feltételezése indokolatlan volt. Nem a tér szerkezete rossz csupán a felfogás mechanikus volta, amely feltételezte az extrém *disztributív* sebesség hozzáadásának lehetőségét a valós sebességhez, anélkül, hogy a figyelembe vette volna az energiamérleget. A visszavert fotonnál már a tükrök és a foton kölcsönhatásaként figyelembe vehető, természetesen a *Galilei* geometria alkalmazása miatt a π -nyi forogtatás ugyancsak számításba kell venni, mind az út, mind sebesség számításánál.

7.3.1. *A fénysugár és a koordinátarendszer*

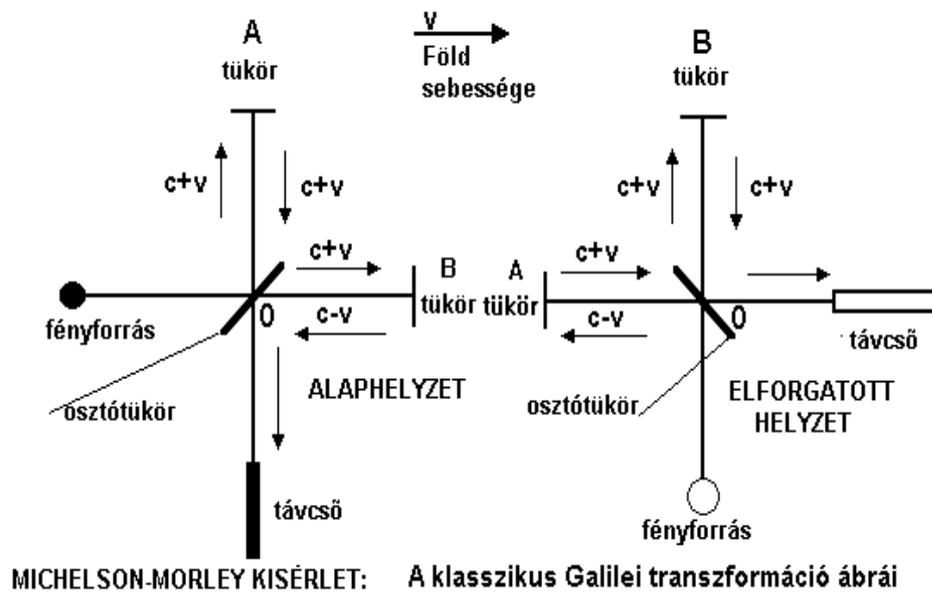
A különféle geometriák és a kísérlet eredménye között mindezekon túlmenően van egy lényeges feltétel, amit semmiképp sem szabad figyelmen kívül hagyni: a Földhöz rögzített kísérleti berendezés és benne \Rightarrow mozgó fénynyaláb között, a tükrökön \Rightarrow történő visszaverődés és irányváltozáson kívül, a szabad térbeli haladása közben van-e csatolás a fény és a mérőrendszer között és ha van ilyen csatolás, akkor az változik-e az osztótükrök és visszaverő tükrök közti út megtételéhez szükséges idő alatt. Ez azért is lényeges, mivel a lézerefénnyel történő kísérletek, ahol igen hosszú utat tesz meg a kettéosztott fénysugár ez már hibát okozhat. Másrészt van egy alapvető ellentmondás abban, hogy általánosan elfogadják, hogy elegendően kis méretekben a *Minkowski geometria helyettesíthető az Euklidesz-féle geometriával*. De hogy, mit jelent az elegendően kicsiny méret, ezt például úgy értelmezzük, hogy a *Michelson-Morley kísérlet elegendően kicsiny méret*, akkor az atomi méretekben fellépő óriási sűrűségek, téreőrök és görbült terek, hogyan értelmezendők. (Pl: gravitációs tér egy proton közelében: stb, mindez azt jelenti, hogy a geometriai rendszer kicsiny vagy nagy volta többnyire önkényes választás eredménye: *általánosnak tekinthető az a meggyőződés, hogy az antropikus méretek szélső értékei, az Euklidesz-féle tér érvényességi határai.* (Ez azonban nem tudományosan megalapozott tény csupán egyfajta rögződött „tudás”.) Ismeretes: a fény az adott geometria rendszer geodetikus vonalait követi, amik nem feltétlenül egyenesek, azonban az is igaz, hogy minden *Riemann* térben létezik *Descartes-féle lokálisan derékszögű koordinátarendszer*, és ezért minden *Riemann-tér*, „lokálisan egyenes” vagyis a tér elég kis része egyenes (*Euklidesz-i*, ha a mérték pozitív definit.) Így minden rajz amely az *Euklidesz geometria* szabályai szerint készült, noha nem minden geometria pozitív definit. **Különösen nem pozitív definit a speciális relativitás elmélet ívelemnégyzet definíciója, tehát a tárgyalt kísérlet állítólag negatív definit térben is igaz posztulátumai szerint.**

8. fejezet

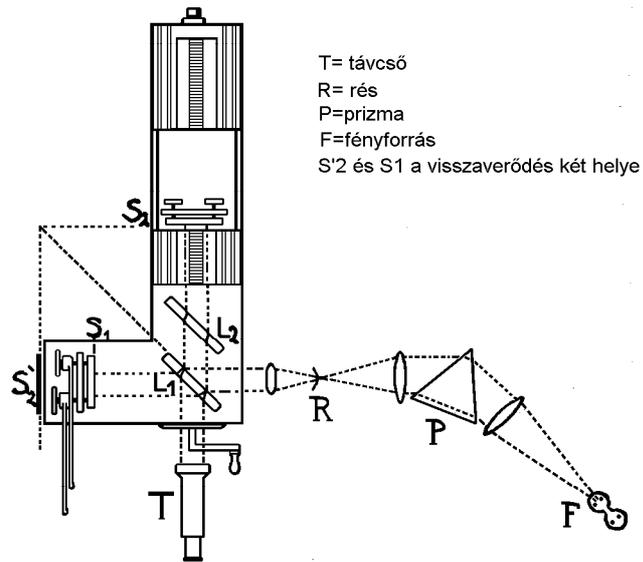
A síkhullám interferencia

8.1. Előzmények, ismertetések

A 2÷7. ábrákon látható a Michelson-Morley kísérletben alkalmazott *Michelson-interferométer* különböző időkben megjelent művekben ábrázolt formája. Nyilvánvaló, hogy ezek alkalmatlanok a *Michelson-Morley kísérlet* pontos jellemzésére. Furcsa, hogy az ábrázolt hat ábra mennyire eltér egymástól. Továbbá az is feltűnő, hogy nagyjából a speciális relativitás elméletének bevezető bizonyításaként rajzolták le ezen ábrákat, és az elforgatott ábra egyetlen esetben sem szerepel.



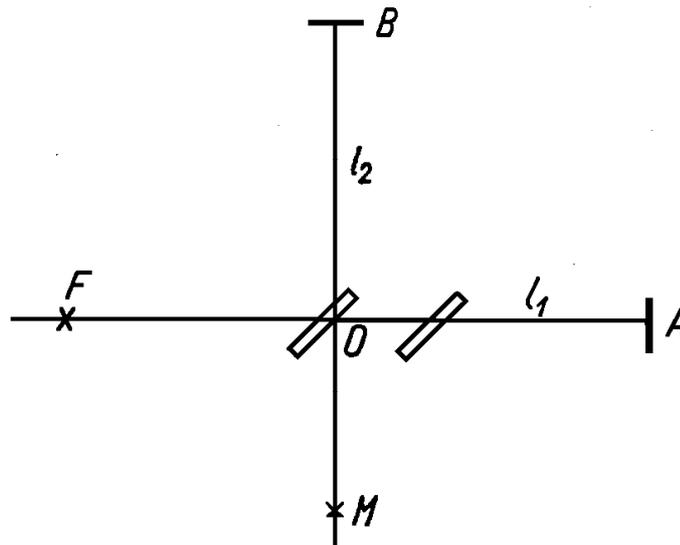
1. ábra.



Michelson interferométer

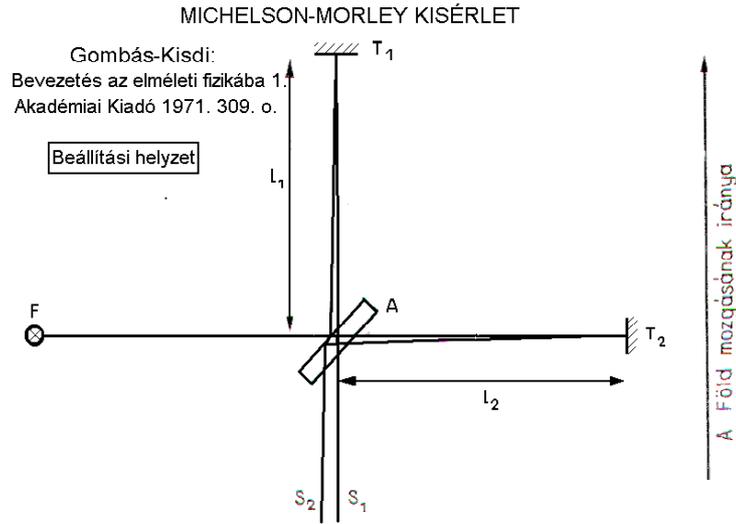
DR.Pogány Béla: A FÉNY 147.o. 1921.

2.ábra. Kiadás:[30] Budapest, Pantheon Irodalmi Intézet R.t. 1921.



dr. Novobáztzy Károly: A RELATIVITÁS ELMÉLETE 16.o.
TANKÖNYVKIADÓ 1964.

3. ábra. Kiadás:[31] Budapest, Tankönykiadó,1964



128. ábra. A Michelson—Morley kísérlet

4.ábra. [31]Egy szokványos elrendezési példa magyarázattal.

Az alábbiakban idézem a 4. ábrához írt magyarázatot, mely a szokásos-klasszikus ismertetése az *Einstein* által egyébként kevésbé ismert és lényegtelennek tartott kísérletnek, mivel azóta gyakorlatilag minden *speciális relativitás* elméletet ismertető írásos anyag ezzel a kísérlettel kezdi meg a téma ismertetését és annak bizonyítását, hogy a fény sebessége független a felvett koordináta-rendszerétől:

Nem szabad elfelejteni, hogy a $c = a \pm b$ egyenlőség a Galilei geometriában minden $a < b$ szög mellett igaz;

és az Euklidesz geometriában:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 \mp 2ab \cos \gamma} \tag{8.1}$$

igaz minden $a < b$ szög esetén, és nincs más lehetőség két sebesség összeadása esetén az abszolút értékekre egy feladaton belül ugyanazt a módszert kell alkalmazni.

„A berendezés működését a klasszikus newtoni mechanika elképzelése szerint írjuk le. Ha a Föld sebessége v , akkor a fény az $I_1 = AT_1$ utat $c-v^*$ sebességgel teszi meg..... Visszaverődés után a fény a Föld mozgásával szemben halad, sebessége ekkor $c+v^\dagger$ Az l_1 kar oda-vissza való befutásához szükséges idő

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1c}{c^2-v^2} = \frac{2l_1/c}{1-v^2/c^2}$$

Az AT_2 út befutásánál tekintetbe kell vennünk, hogy ez az l_2 kar önmagával párhuzamosan mozog, a („128”) ábra szerinti elrendezésnél függőlegesen felfelé. A fény útja A-tól T_2 -ig tehát átfogója lesz egy olyan

[†]Galilei geometria

derékszögű háromszögnek, melynek egyik befogója l_2 , másik pedig vt . A fény útja A -tól T_2 -ig tehát:

$$ct = \sqrt{l_2^2 + (vt)^2}^{\ddagger}$$

lesz, amiből a futási idő:

$$t = \frac{l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

az l_2 kar oda vissza befutásához szükséges idő ennek kétszerese, azaz

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Hasonlítsuk össze a két fénysugár útjának megtételéhez szükséges időt. Az időkülönbség :

$$\tau = t_1 - t_2 = \frac{2l_1}{1 - v^2/c^2} - \frac{2l_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ez az időkülönbség azt eredményezi, hogy az S_1' és S_2 fénysugarak nem lesznek teljesen fázisban,* hanem interferencia lép fel.

Ha most a berendezést elforgatjuk 90^0 -kal úgy, hogy az l_2 mutasson a Föld haladásának irányába, akkor az időkülönbség

$$\tau' = t'_1 - t'_2 = \frac{2l_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{2l_2/c}{1 - v^2/c^2}$$

Mivel τ és τ' különböznek egymástól, ezért az interferenciakép a 90^0 -os forgatás után meg kell, hogy változzék és az interferenciacsíkok eltolódásából a Föld sebessége meghatározható.....

A MICHELSON-MORLEY KISÉRLET eredményének elméleti hordereje igen nagy. Ez egyértelműen bizonyítja, hogy a Föld mozgása a fény terjedésére semmilyen hatással nincs,[†] a fény terjedése is eleget tesz az *Einstein*-féle relativitási elvnek. A fenti levezetés, melyből az interferenciacsíkok eltolódására következtettünk, a *Galilei*-transzformáción alapult. A kísérleti tények hatása alatt el kell tehát vetnünk a *Galilei*-transzformációt és meg kell találnunk az inerciarendszereket összekapcsoló azon koordináta transzformációt, mely összhangban van az *Einstein*-féle relativitási elvvel.”*[‡]

([33]Gombás-Kisdi: Bevezetés az elméleti fizikába 1.306-307.o Budapest, Akadémia Kiadó,1971.)

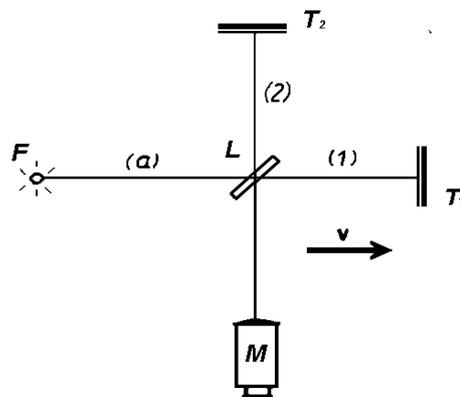
[‡]Euklidesz geometria

*Itt nem szuperpozícióról, hanem interferenciáról van szó. Lásd:7.231

[†]Mivel a jelzett fénysugarak semmilyen információt nem hordoznak, ezért ez a megállapítás alaptalan.

[‡]Itt nem szuperpozícióról, hanem interferenciáról van szó.Lásd 7. fejezet Vavilov idézeteket.

A fenti idézet, amely jól tükrözi *Michelson-Morley* kísérlet többi levezetéseit, természetesen téves, mivel az l_1 karnál a *Galilei geometriát* alkalmazta, míg az l_2 karnál az *Euklidesz geometriát*, aminek következménye az interferencia csíkok eltolódására adott téves magyarázat és az *Einstein*-i elv és a hozzá alkalmazott *Lorentz*-transzformáció szükségességének követelménye. Nem szabad elfelejteni, hogy *Michelson-Morley* kísérlet kétdimenziós és a valóságban nem egy elemi fénysugárból alakul ki az interferencia, hanem egy kör vagy ellipszis alakú gyakorlatilag végtelen számú elemi fénysugárból és valójában a kiinduló fénysugár nem önmagával alkot interferenciát, hanem két eltérő koherens elemi fénysugáraiból születnek meg az interferenciakép egyes pontjai, ebből az is következik, hogy a fenti és minden hozzá hasonló levezetés téves alapfeltételezésből indul ki, ezért értelmetlen a végkövetkeztetés.

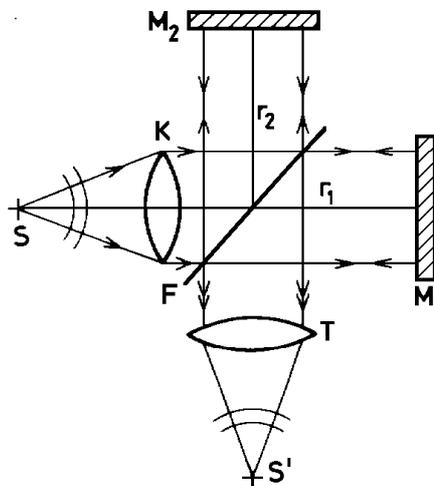


MICHELSON-féle kísérlet

Budó Ágoston: KISÉRLETI FIZIKA III. 1977. 289. o.

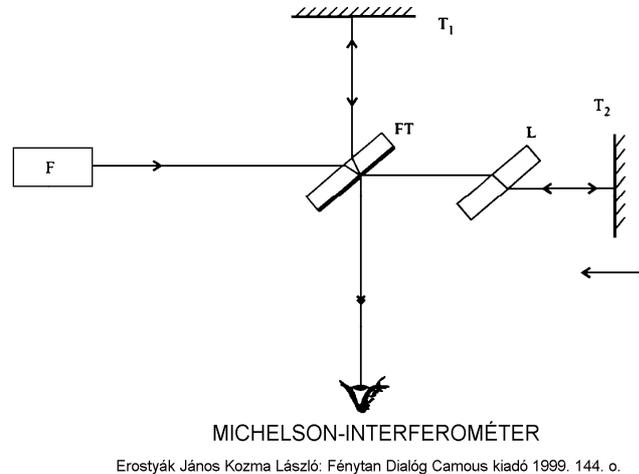
5. ábra. Kiadás:[34] Budapest, Tankönyvkiadó, 1977.

A MICHELSON INTERFEROMÉTER VÁZLATA



DR.BERNOLÁK KÁLMÁN: A FÉNY Műszaki Könyvkiadó 1981. 69. o.

6. ábra. [35] Műszali könyvkiadó, Budapest. 1981



7. ábra. Kiadás:[36] Dialóg Campus kiadó, 1999.

Amint azt már korábban is kifejtettem a 1. ábrában *Einstein* is a *Galilei* transzformációt vélte alkalmazni, annak ellenére, hogy a valóságban az *Euklidesz* geometriát alkalmazta, de igen következetesen *Galilei*-re hivatkozott. Mi is volt az alapvető különbség:

Az „y” irányú tengelyeken a „c” és „v” eredő sebességét c_{eE} -t az *Euklidesz* síkon a *Pithagorász* tétel segítségével határozták meg, míg a *Galilei* síkon a fenti három sebesség közötti viszonyt a $c_{eG} = c - v$ összefüggéssel határozta meg.

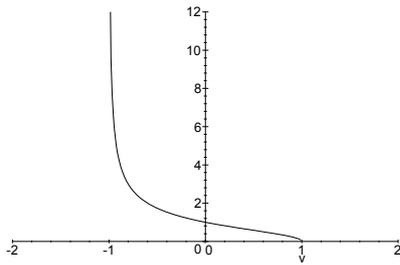
A fenti összefüggések úgy adódnak, hogy három sebesség egy-egy háromszöget határoz meg a mindkét geometriában, a két háromszög két rövidebb oldala adott és a leghosszabb oldalát kell kiszámítani: *Galilei* esetében ez a két rövidebb oldal algebrai összege, míg *Euklidesz* esetében az általános háromszög megoldása, helyett, mivel a $c \perp v$ reláció fennáll a *Pithagorász*-tétel felhasználása adja a megoldást.

8.1.1. GALILEI ÉS EUKLIDESZ-sebességek összehasonlítása

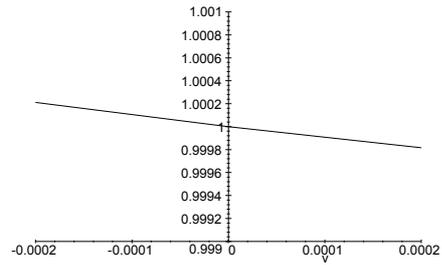
A kettő eredő különbségét a hányados és különbségfüggvények segítségével lehet alkalmasan bemutatni:

- A hányadosfüggvény: $h_{fény.s.} = \frac{c_G}{c_E}$ függvényével lehet szemléltetni, a nagyságrendi viszonyokat, ahol a szemléletesség érdekében „v”-t, „c”-re normáljuk:

$$h_{fény.s.} = \frac{1 - v}{\sqrt{1 - v^2}} \quad c \equiv 1$$



Nagyléptékű sebesség hányados

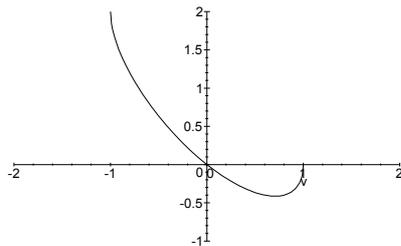


Föld-fény léptékű sebesség hányados

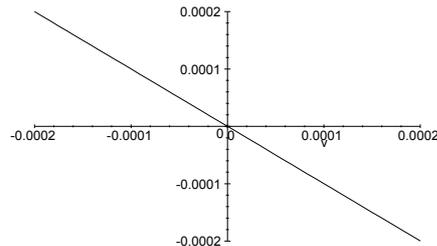
Amint az a fenti két ábrán jól kivehető a negatív és pozitív „v”, ami a kísérletben a Föld sebessége volt, a fény sebessége pedig c , asszimmetrikus hányadost ad nagy sebességeknél, azonban kis relatív sebességnél, „ $v/c = 0.0001$ ” már gyakorlatilag a görbe szimmetrikus:

- Különbségi függvények a tényleges különbségek bemutatásával a várható eltérésekre ad támaszt:

$$\Delta v = (1 - v) - \sqrt{1 - v^2} \quad c \equiv 1$$



Nagyléptékű sebesség különbség függvény.



Föld-fény léptékű különbségfüggvény

Ebből pedig az következik, hogy a két geometriai felfogás között a Michelson-Morley mérés nem alkalmas a különbségtételre.

8.1.2. Transzformációk néhány sajátossága

- Ha két inerciális rendszer között, egy feltételezett állandó egyenletes, de differenciális gyorsulással számítjuk ki egy transzformációs integrál segítségével az áttérést, akkor valódi kapcsolatot teremthetünk a két eltérő sebességű koordináta-rendszer között. Mivel a kicsiny egyenletes gyorsulás (a koordináta-rendszer sebességének dx/dt jellegű változása a differenciális transzformáció segítségével) a sebességet folyamatosan megváltoztatja, azaz a benne zajló folyamatok jellemzőinek mindegyike állandóan változik.
- Mivel a fenti művelet során a gyorsulás állandó, változik a sebesség és kicsiny constans erőre van szükség, feltétlenül figyelembe kell venni a *GALILEI* rendszerben az erők állandó változása a gyorsuláshoz hasonló módon, egy további is hatást jelent, amely

forgatónyomatékként

- jelenik meg és a fény pályáját elgörbíti. Ezt kimerítően tárgyalja a Galilei geometria egy két térdimenzióból és egy idődimenzióból álló 3 dimenziós változata a **POINSON GEOMETRIA**, melynek síkbeli transzformációs formulái:

$$\boxed{x' = (\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y} \quad (8.2)$$

$$\boxed{y' = -(\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y} \quad (8.3)$$

$$\boxed{u' = \quad \quad bx \quad \quad -y + u} \quad (8.4)$$

Általánosnak tekinthető, az a jelenség, hogy nem figyeltek fel és ezért elhanyagolták, a transzformációs formulák nem csak egy jelenég: a fény sebesség megváltozására utalnak, hanem egy másodikra is a frekvencia megváltozására (Doppler effektus.) Lényeges tehát, hogy a *GALILEI* transzformáció is, alkalmazása során két egyszerre fellépő és elválaszthatatlan jelenséget is jósol meg:

- 1./ A fénysebesség megváltozása
- 2./ A frekvencia megváltozása.

- Ezekből következik, hogy minden olyan mérés esetén, amikor a fénytani jelenséget más sebességű koordináta rendszerbe transzformált frekvencia-változás következményeit is figyelembe kell venni, mivel az indikált fáziskülönbség a futási idő és a frekvencia változására egyaránt érzékeny.
- Különösen áll ez a körülmény azon mérésekre, amelyek az interferencia jelenségét használják fel.
- Az interferencia két: eredetileg fáziskülönbség nélküli fényhullám találkozása révén jön létre. Mindkét hullám fázishelyzete tartalmazza a megtett útra jellemző információt, s a mérés során épp ezt az információt kívánjuk az interferenciakép alapján makroszkópiusan is érzékelhetővé illetve számszerűen értékelhetővé tenni.
- A **MICHELSON - MORLEY kísérlet** során a találkozó fényhullámok fázishelyzetében bekövetkező változásokat vizsgálták. Azonban csak a fénysebesség-változás következtében beálló fázisváltozást vették figyelembe és nem foglalkoztak a frekvenciaváltozás következtében beálló fázisváltozással. Ez a hiba az alkalmazott matematikai - fizikai model hibája, amely csak a futási időket veszi figyelembe és ebből számítja ki a várható fáziskülönbséget. Ez téves, mivel a fellépő fáziskülönbség úgy számítható ki, ha mindkét fényutra nézve kiszámítjuk a teljes úthosszra eső fázisszögváltozást, ami egyszerre függ a frekvenciától és a futási időtől:

$$\Theta = \Sigma \delta\omega \delta t = \Sigma \delta \frac{k}{c} \delta x$$

- A számítás végrehajtásánál a fő nehézséget az okozza, hogy „ c ” értékét más mérésekből, míg a karhosszakat a mozgó rendszerben ismerjük. Ugyanis a „ c_0 ” értékét olyan más helyen és időben végzett mérésekből ismerjük, amelyeknek a kísérleti berendezéshez viszonyított helyzete nem definiált, ezért a „ c_0 ” értékét egy feltételezett K_0 – *Naprendszerhez* rendeljük hozzá, amely a két karhoz rendelhető K_A és K_B koordinátarendszerektől különbözik és ezért kell a transzformációt elvégezni.

- A transzformáció alapvetően a speciális relativitás elméletével kapcsolatban szerepet játszott 3 féle geometriának megfelelően 3 féle lehet:

– **GALILEI – A KLASSZIKUS FIZIKA**

– **LORENTZ – MINKOWSKI -EINSTEIN-i RELATIVITÁS**

– **EUKLIDESZ – A MINDENNAPI ÉLET**

- Azonban nem szabad elfelejteni, hogy a fénysebességre vonatkozó mérések bár szintén a Földön végezték, a mérések koordinátarendszerének és Föld sebességének irányának viszonya nem tekinthető egyértelműen meghatározottnak.

A fenti megállapítás a 3 féle geometriára korántsem magától értetődő:

Megfigyelve ugyanis az elméleti fizika ezen fejezeteit feltűnik, hogy minden tárgyalás az Euklidesz-i alapokról indul, (rajzok, algebra stb.) azután a mozgásokat Galilei szerint transzformálva jönnek létre az ellentmondások. Az ellentmondások feloldására vezetik be a Lorentz transzformációt és a Minkowski geometriát. Majd bevezetésre kerül az ivelen négyzet fogalma, mint egy vektor abszolút értéke, azonban ennek képzéséhez az euklideszi bázisú képzetes számot használják. Mindebből az látszik, hogy a speciális relativitás elmélete nem következetes matematikai alapon épült fel. Nyilvánvaló, hogy a következetes matematikailag koherens tárgyalás elengedhetetlen.

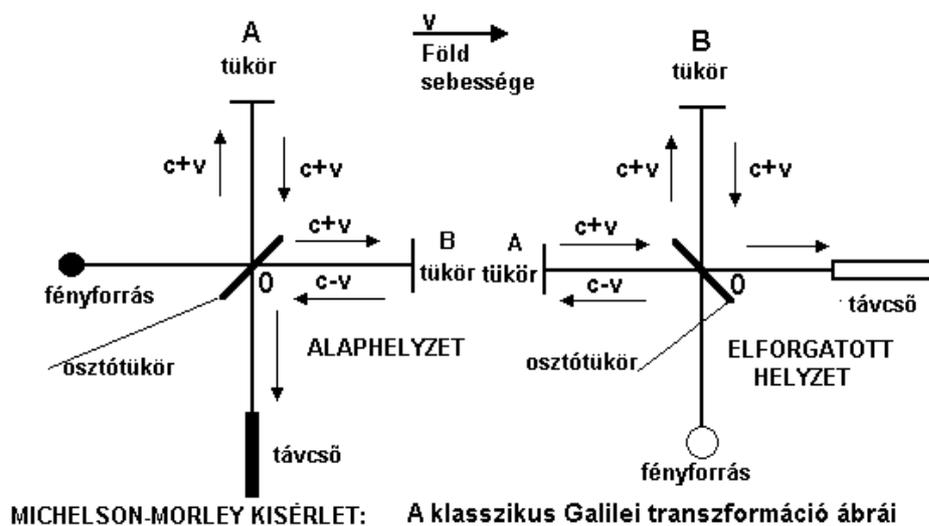
9. fejezet

Síkhullámú interferencia kísérlet.

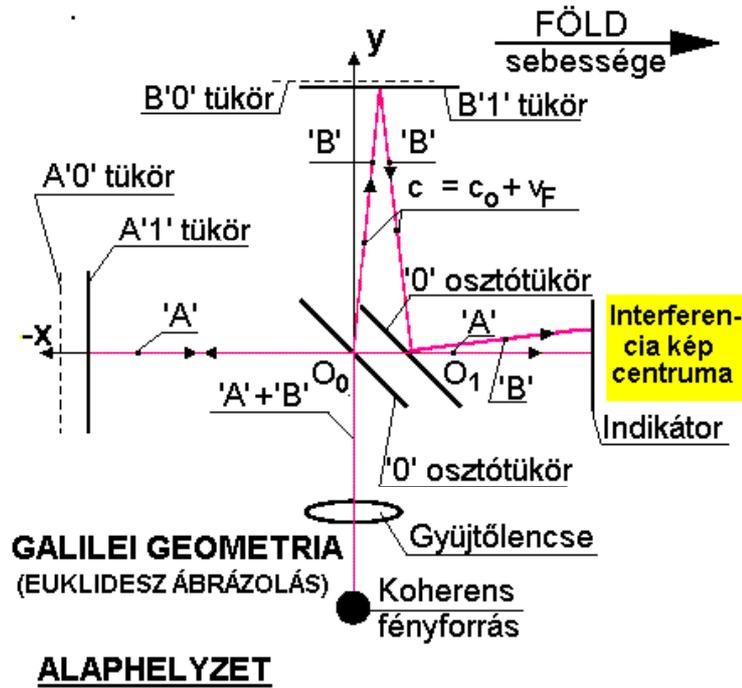
A Michelson-Morley kísérlet általános felfogása.

9.1. Galilei geometria.

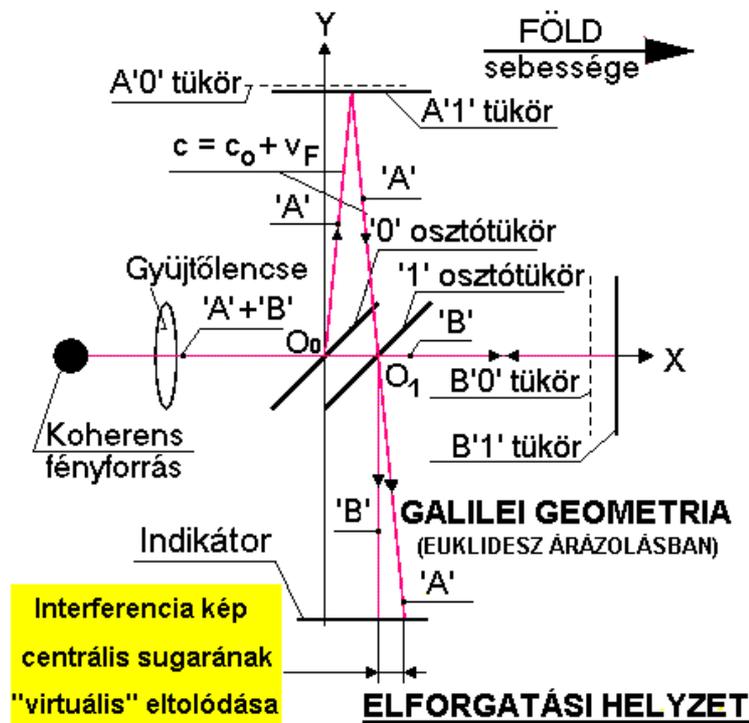
A klasszikus Michelson-Morley kísérlet lefolytatásának sematikus ábrázolása, és a két állapotban a fénysugarak haladása ezen az ábrán alapul minden levezetés, amely a kísérlet várható eredményét mutatja ki:



1.ábra. A klasszikus Michelson-Morley kísérlet klasszikus ábrázolása.



2.ábra. Michelson-Morley kísérlet klasszikus sémája. I.



3.ábra. A Michelson-Morley kísérlet klasszikus sémája. II.

A Michelson-Morley kísérletnek nem volt következetes tárgyalásmódja. Alapvető jellemzője volt, hogy a kísérlet modelszámításai során teljes egészében figyelmen kívül hagyták azt a tényt, hogy az osztótükör után a két merőleges sugár nem tár-

$$L_{B1} = \overline{O_0(B1 \text{ tükör})}$$

$$L_{B2} = \overline{(B1 \text{ tükör})O_1}$$

Itt tehát feltétlenül figyelembe kell venni, hogy a teljes számításba vett pálya:

1. „**A**” jelű pálya: a „ θ_0 ” osztótükör „ $A1$ ” tükör; osztótükör: „ 1 ” „ A ” sugár
2. „**B**” jelű pálya : a „ θ_0 ” osztótükör „ $A2$ ” tükör, osztótükör: „ 1 ” „ B ” sugár

A pálya többi része csupán a mérés végrehajtásának elengedhetetlen kelléke.

A hullámmegoldás komplex alakjának a kitevője:

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 X = k_0 (c_0 T - X) \quad (9.1)$$

A Galilei-transzformáció formulái, ha a fénysugár iránya és a Föld „ v_F ” sebessége azonos irányú és párhuzamos, a koordináta-rendszer origója az osztótükör „ 0_0 ” pontja, amely a fénysugár repülésének ideje alatt folyamatosan eltolódik, ugyanannyit tolődik el az „ $A1$ ” jelű tükör az L_{A1} alatti út megtételének ideje alatt, míg az L_{A2} alatti út megtétele alatt „ $A1$ ” tükör és az osztótükör θ_0 pontja:

- Az eltolódás nagysága és figyelembevétele:
 - L_{A1} és L_{A2} jelű pályák megtétele során a Galilei téridő transzformáció az eltolódást a sebességek összeadásának lehetőségével veszi figyelembe.
Az L_{B1} és L_{B2} jelű pályák esetében az „ y ” koordináta az osztótükör eltolódása következtében a tükör mindkét esetben „ $v_F t$ ” nagyságú utat tesz meg a fénysugárra merőleges irányban és ezen két befogó összege adja az átfogó nagyságát amit a fénysugár ténylegesen befut,

- azaz a megtett út $L_{B1} = y + b$, ahol $b = v_F t$.

9.1.2. „A” KÁRON MOZGÓ FÉNY

A FÖLD transláció mozgásával párhuzamos és megegyező irányban:

$$L_{A1} \quad c_0 \quad v_F \quad (9.2)$$

$$\Theta_{2A1} = \omega_0 t_{1A1} - k_0 (L_{A1} + v_F t_{1A1}) = \omega_0 t_{1A1} - k_0 L_{A1} - k_0 v_F t$$

$$\Theta_{2A1} = \omega_0 \left(t_{A1} - v_F t_{A1} \frac{k_0}{\omega_0} \right) - k_0 L_{A1} = \omega_0 t_{A1} (1 - v_F/c_0) - k_0 L_{A1} \quad (9.3)$$

Mivel a hosszú megfigyelési idő miatt az $\int t_{A1}$ tag kiesik:

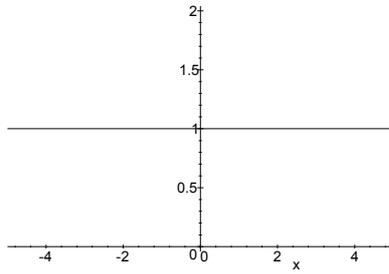
$$\Theta_{2A1} = -k_0 L_{A1}$$

$$\omega_{2A1} = \omega_0 (1 - v_F/c_0)$$

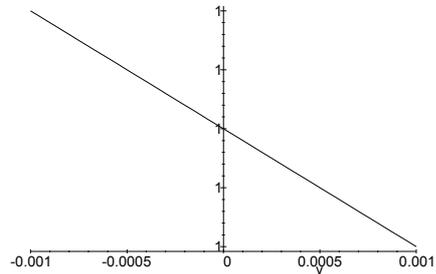
$$k_{2A1} = k_0$$

$$c_{G2A1} = \frac{\omega}{k} = c_0 (1 - v_F/c_0) \quad (9.4)$$

$$\omega_{G2A1} = (1 - v10^{-4})$$



Galilei Doppler effektus nagy léptékben



Galilei Doppler effektus kis léptékben.

A FÖLD translációs mozgásával párhuzamos, de ellentétes irányban:

$$L_{A2} - c_0 v_F \quad (9.5)$$

Mivel a hosszú megfigyelési idő következtében a $\int \omega_0 t_{A2}$ tagok kiesnek:

$$\begin{aligned} \Theta_{2A2} &= \omega_0 t_{1A2} - k_0(L_{A1} + v_F t_{1A2}) = \omega_0 t_{1A1} - k_0 L_{A1} - k_0 v_F t_{1A2} \\ \Theta_{2A2} &= \omega_0(t_{1A2} - v_F t_{1A2} \frac{k_0}{\omega_0}) - k_0 L_{A1} = \omega_0 t_{1A2}(1 - v_F/c_0) - k_0 L_{A1} \quad (9.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{2A2} &= -k_0 L_{A2} \\ \omega_{2A2} &= \omega_0(1 + v_F/c_0) \\ k_{2A2} &= k_0 \\ c_{G2A2} &= \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_0(1 + v_F/c_0)}{k_0} = c_0(1 + v_F/c_0) \quad (9.7) \end{aligned}$$

Az eredő fázisváltozás:

$$\begin{aligned} \Theta_{2A} &= \Theta_{2A1} + \Theta_{2A2} = -2k_0 L \\ \Theta_{2A} &= -2k_0 L \quad (9.8) \end{aligned}$$

Már itt levonható következtetés, hogy a translációval párhuzamosan a fénysugár az *osztótükör* 0_0 és az „A'1'” jelű tükör közti oda - vissza úton azonos nagyságú fázisszögváltozáson megy keresztül. (A sebesség és a frekvenciaváltozás kompenzálja egymást.)

9.1.3. „B” KARON MOZGÓ FÉNY

A FÖLD translációs mozgására közel merőleges irányban:

$$L_{B1} \quad c_0 \quad v_F$$

A t_{B1} és t_{B2} idők illetve a Θ_{B1} és Θ_{B2} kiszámítására nem alkalmas az irodalomból ismert klasszikus számítási eljárás, mivel az nem a *Galilei* transzformáció következetes alkalmazásán alapul. Ugyanis mint az a 2. ábrán is látható a „B'1'” tükör felé

induló fénysugár nem pontosan merőleges v_F -re, hanem azzal α szöget zár be. Ennek következtében az eredő fénysebességnek van „ v_F ” irányba eső vetülete, ezért természetesen a *Galilei* háromszög átfogójának számítási formuláját kell alkalmazni. :

$$c_{B1} = c_0 + v_F \quad (9.9)$$

A *GALILEI transzformáció* formulái : amelyek tartalmazzák az „ 0_0 ” pont „ v_F ” irányú eltolódását:

$$\overline{0_0 0_1} = ((t_{B1} + t_{B2})v_F) \quad (9.10)$$

- **Fontos megállapítás, hogy interferencia akkor jöhet létre ha :**

$$(t_{A1} + t_{A2}) = (t_{B1} + t_{B2}) \pm \frac{n}{\omega_0} \quad (9.11)$$

- Amint az ábrán látható, fénysugár pályája, nem az „ y ” koordináta mentén halad, hanem az „ $0_0 B 10_1$ ” pályán, egyidejűleg fontos az a megállapítás, hogy ez nem az „éterrel” összefüggő jelenség, hanem a fény és a mérőrendszer egymástól független sebességének virtuális* összegzése. A transzformációs formuláknak, természetesen a Galilei geometriának kell megfelelniük:

Behelyettesítve ezt a komplex hullámfüggvény kitevőjébe:

$$\Theta = k_0(c_0 T - X)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{2B1} &= k_0(c_0 t_{1B1} - (L_{B1} + t_{1B1}(c_0 + v_F))) \\ \Theta_{2B1} &= \omega_0 t_{1B1} - k_0 L_{B1} + k_0 t_{1B1}(c_0 + v_F) \end{aligned} \quad (9.12)$$

Mivel a hosszú megfigyelési idő következtében $\int \omega_0 t_{B1}$ -s tényező kiesik:

$$\Theta_{2B1} = -k_0 L_{B1}$$

A szimmetria következtében:

$$\begin{aligned} \Theta_{2B1} &= \Theta_{2B2} \\ \Theta_{2B2} &= -k_0 L_{B2} \\ \Theta_{2B} &= -2k_0 L_B \end{aligned} \quad (9.13)$$

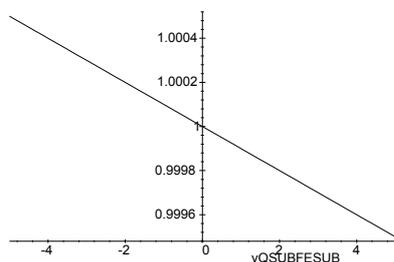
A paraméterek értékeinek megváltozása:

$$\begin{aligned} \omega_{2B1} &= \omega_0(1 - v_F/c_0) \\ k_{2B1} &= k_0 \\ c_{G2B1} &= \frac{\omega}{k} = c_0(1 - v_F/c_0) \end{aligned} \quad (9.14)$$

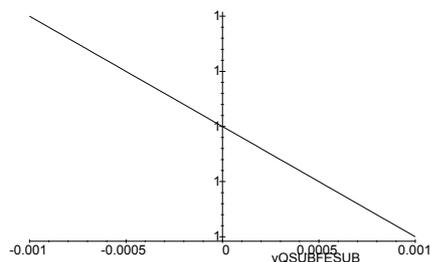
Amint az látható az L_{B1} és L_{B2} úton is fellép a mind a sebességváltozás mind a *Doppler-effektus*. (Ez az ugynevezett *merőleges Doppler-effektus* a speciális relativitás elmélete szerint csak *LORENTZ transzformáció* keretében tárgyalható.)

*Azért virtuális az összegzés, mert a fény merőlegesen verődik vissza, de az osztótűkőr haladása a rajzon a ferde visszaverődéssel ábrázolódik.

$$\omega_{2B1} = (1 - v_F)$$



Galilei Doppler effektus nagy léptékben



Galilei Doppler effektus kis léptékben.

- Következő lépésként megadhatók a *Doppler-effektus* következtében megváltozott frekvenciák:

$$\begin{aligned}\omega_{2A1} &= \omega_0(1 - v_F/c_0) \\ \omega_{2A2} &= \omega_0(1 + v_F/c_0) \\ \omega_{2B1} &= \omega_{2B2} = \omega_0(1 - v_F/c_0)\end{aligned}\tag{9.15}$$

Mivel rendelkezésre állnak mind a karhossz $L = \overline{0_0L_{A1}} = \overline{0_0L_B}$, mind térfrekvencia értékek kiszámítható az egyes utakhoz tartozó összes fázisszögváltozás értéke:

- Mindkét irányban a teljes térbeli fázisforgatás:

$$\Theta_{2A} = -2k_0L_0 = -5,32 \times 10^7$$

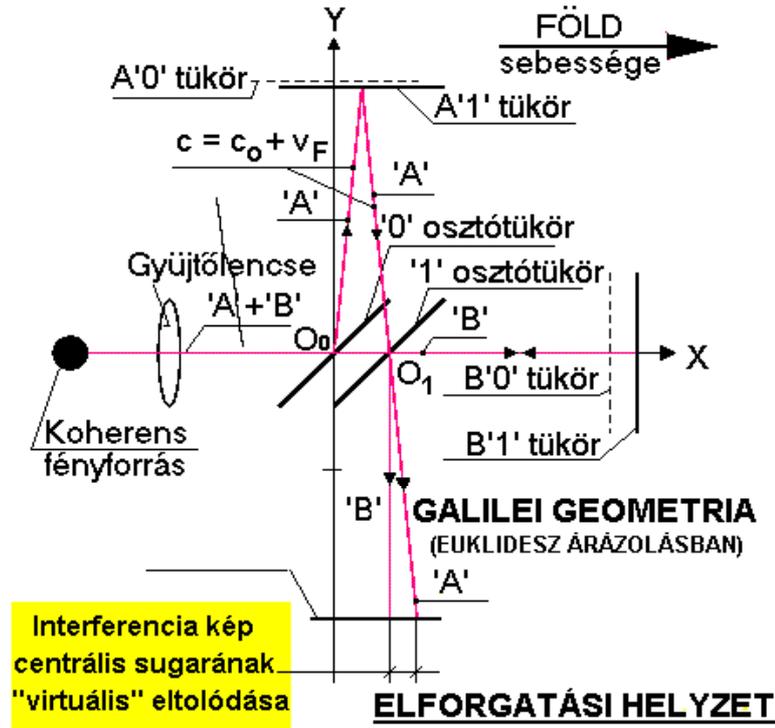
$$\Theta_{2B} = -2k_0L_0 = -5,32 \times 10^7$$

- Az eredő különbségi fázisforgatás:

$$\Theta_{2e} = \Theta_{2A} - \Theta_{2B} \equiv 0\tag{9.16}$$

9.1.4. *ELFORGATÁSI HELYZET: 1-3-5. ábrák.*

Az 5. ábra alapján négyféle útra kell kiszámítani az időket és a frekvenciákat: L_{B1} és L_{B2} a FÖLD translációs mozgásával párhuzamos, míg L_{A1} és L_{A2} arra közel merőleges.



5.ábra. Michelson-Morley kísérlet: GALILEI ELFORGATOTT HELYZET.

$$\begin{aligned}
 L_{A1} &= \overline{O_0(A_1 \text{tükör})} \\
 L_{A2} &= \overline{(A_1 \text{tükör})O_1} \\
 L_{B1} &= \overline{O_0(B_1 \text{tükör})} \\
 L_{B2} &= \overline{(B_1 \text{tükör})O_1}
 \end{aligned}$$

Itt tehát feltétlenül figyelembe kell venni, hogy a teljes számításba vett pálya:

„A” jelű pálya: a $0'$ osztótükör A_1' tükör $1'$ osztótükör: A' sugár

„B” jelű pálya: a $0'$ osztótükör B_1' tükör $2'$ osztótükör: B' sugár

A pálya többi része csupán a mérés végrehajtásának elengedhetetlen kelléke.

A hullámmegoldás komplex alakjának a kitevője, mint az első esetben is:

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 X = k_0 (c_0 T - X) \quad (9.17)$$

A Gallilei-transzformáció formulái, ha a fénysugár iránya és a Föld „ v_F ” sebessége azonos irányú és párhuzamos, a kordinátarendszer origója az osztótükör „ 0_0 ” pontja, amely a fénysugár repülésének ideje alatt folyamatosan eltolódik, ugyanannyit tolik el az L_{B1} alatti út megtételének ideje alatt, míg az L_{B2} alatti út megtétele alatt B_1' tükör és az osztótükör $0_0 \Rightarrow 0_1$:

- Az eltolódás nagysága és figyelembevétele:

- Az L_{B1} és L_{B2} jelű pályák megtétele során a Galilei téridő transzformáció az eltolódást a sebességek összeadásának lehetőségével veszi figyelembe.

- Az L_{A1} és L_{A2} jelű pályák esetében az „ y ” koordináta az osztótükör eltolódása következtében az „ O ” tükör mindkét esetben „ $v_F t$ ” nagyságu utat tesz meg és ezen két befogó összege adja az átfogó nagyságát amit a fénysugár ténylegesen befut,

azaz a megtett út $L_{A1} = y + b$, ahol $b = v_F t$.

9.1.5. „ B ” KÁRON MOZGÓ FÉNY

A FÖLD transzlációs mozgásával párhuzamos és megegyező irányban:

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 Y = k_0 (c_0 T - Y) \quad v_F$$

$$\Theta_{2B1} = k_0 (c_0 t_{1B1} - L_{B1} - k_0 v_F t_{1B1})$$

$$\Theta_{2B1} = \omega_0 (t_{1B1} - v_F t_{1B1} \frac{k_0}{\omega_0}) - k_0 L_{B1} = \omega_0 t_{1B1} (1 - v_F/c_0) - k_0 L_{B1} \quad (9.18)$$

Mivel a hosszú megfigyelési idő miatt az $\omega_0 t$ -es tagok kiesnek:

$$\begin{aligned} \Theta_{2B1} &= -k_0 L_{B1} \\ \omega_{2B1} &= \omega_0 (1 - v_F/c_0) \\ k_{2B1} &= k_0 \\ c_{G2B1} &= \frac{\omega}{k} = c_0 (1 - v_F/c_0) \end{aligned} \quad (9.19)$$

A FÖLD transzlációs mozgásával párhuzamos, de ellentétes irányban:

$$\Theta_{2B2} = k_0 (v_0 t_{1B2} - L_{B2} + v_F t_{1B2})$$

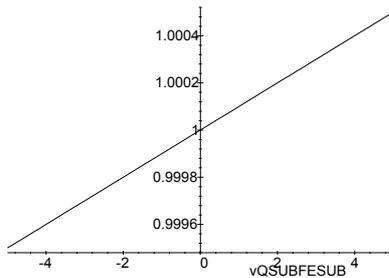
$$\Theta_{2B2} = \omega_0 (t_{1B2} + v_F t_{1B2} \frac{k_0}{\omega_0}) - k_0 L_{B2}$$

$$\Theta_{2B2} = \omega_0 t_{1B2} (1 + v_F/c_0) - k_0 L_{B2} \quad (9.20)$$

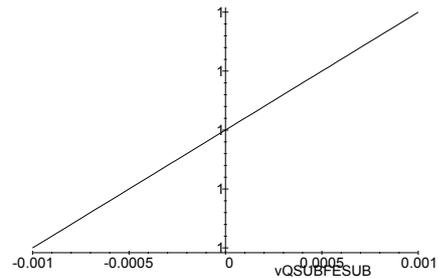
Mivel a hosszú megfigyelési idő következtében a „ $\int \omega_0 t$ ” tag kiesik:

$$\begin{aligned} \Theta_{2B2} &= -k_0 L_{B2} \\ \omega_{2B2} &= \omega_0 (1 + v_F/c_0) \\ k_{2B2} &= k_0 \\ c_{G2B2} &= \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_0 (1 + v_F/c_0)}{k_0} = c_0 (1 + v_F/c_0) \end{aligned} \quad (9.21)$$

$$\omega_{2B2} = (1 + v_F 10^{-4})$$



Galilei Doppler effektus nagy léptékben



Galilei Doppler effektus kis léptékben.

Az eredő fázisváltozás:

$$\begin{aligned}\Theta_{2B} &= \Theta_{L_{2B1}} + \Theta_{2B2} = -2k_0L_{B1} - 2k_0L_{B2} \\ \Theta_{2B} &= -2k_0(L_{B1} + L_{B2})\end{aligned}\quad (9.22)$$

Mindkét irányban az eredő téridőbeli fázisforgatás:

$$\Theta_{2A} = -2k_0L_0 \quad (9.23)$$

$$\Theta_{2B} = -2k_0L_0$$

$$\boxed{\Theta_{2A} = -5,32 \times 10^7} \quad (9.24)$$

$$\boxed{\Theta_{2B} = -5.32 \times 10^7} \quad (9.25)$$

Az eredő különbségi fázisforgatás:

$$\boxed{\Theta_{2e} = \Theta_{2A} - \Theta_{2B} \cong -5.32 \times 10^7 + 5.32 \times 10^7} \quad (9.26)$$

$$\boxed{\Theta_{2e} = 0} \quad (9.27)$$

Már itt levonható következtetés, hogy a translációval párhuzamosan a fénysugár az osztótükör és az „A” jelű tükör közti oda - vissza úton azonos nagyságú fázisszögváltozáson megy keresztül. (A sebesség és a frekvenciaváltozás kompenzálja egymást.)

9.1.6. „A” KÁRON MOZGÓ FÉNY

A FÖLD translációs mozgására közel merőleges irányban:

$$L_{A1} \quad c_0 \quad v_F$$

A t_{A1} és t_{A2} idők illetve a Θ_{A1} és Θ_{A2} kiszámítására nem alkalmas az irodalomból ismert klasszikus számítási eljárás, mivel az nem a GALILEI transzformáció következetes alkalmazásán alapul. Ugyanis mint az az ábrán is látható a B tükör felé induló fénysugár nem pontosan merőleges v -re, hanem azzal α szöget zár be. Ennek következtében az eredő sebességnek van „ v_F ” irányba eső vetülete, ezért természetesen a GALILEI háromszög átfogójának számítási formuláját kell alkalmazni.

:

$$c_{GE} = c_0 + v_F$$

A GALILEI transzformáció formulái : amelyek tartalmazzák az „0” pont „ x ” irányú eltolódását:

$$\overline{0_00_1} = (t_{A1} + t_{B2})v_F \quad (9.28)$$

Amint az ábrán látható, fénysugár pályája, nem az „ y ” koordináta mentén halad, hanem az „ $0_0A'1'0_1$ ” pályán, egyidejűleg fontos az a megállapítás, hogy ez nem az „éterrel” összefüggő jelenség, hanem a fény és a mérőrendszer egymástól független sebességének következménye. A transzformációs formulák, természetesen a Galilei geometriának kell megfelelniük.

Behelyettesítve ezt a komplex hullámfüggvény kitevőjébe:

$$\begin{aligned}\Theta_{2A3} &= k_0(c_0 t_{1A1} - L_{A1} + (c_0 + v_F)t_{1A1}) \\ \Theta_{2A3} &= \omega_0(t_{1A1} - (c_0 + v_F)t_{1A1})\frac{k_0}{\omega_0} - k_0 L_{A1}\end{aligned}\quad (9.29)$$

Mivel a hosszú megfigyelési idő következtében " $\int \omega_0 t_{A1}$ " -es tényező kiesik:

$$\Theta_{2A3} = -k_0 L_{A1} \quad (9.30)$$

- A szimmetria következtében:

$$\begin{aligned}\Theta_{2A3} &= \Theta_{2A4} \\ \Theta_{2A4} &= -k_0 L_{A1} \\ \Theta_{2A} &= -2k_0 L_{A1}\end{aligned}\quad (9.31)$$

A paraméterek értékeinek megváltozása:

$$\begin{aligned}\omega_{2A3} &= \omega_0(1 - v_F/c_0) \\ k_{2A3} &= k_0 \\ c_{G2A3} &= \frac{\omega}{k} = c_0(1 - v_F/c_0)\end{aligned}\quad (9.32)$$

Numerikusan:

$$\begin{aligned}L_{B1} &= L - \Delta L \\ L_{ELF} &= 2L - 2\Delta L \\ -2\Delta L_{ELF} &= -v_F * 2L / (c_0(1 - v_F/c_0)) = \\ -\Delta L_{ELF} &= -3 * 10^4 * 2 * 10 / ((3 * 10^8)(1 - 3 * 10^4 / 3 * 10^8))\end{aligned}\quad (9.33)$$

$$\Delta L_{ELF} = 2.0 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (9.34)$$

Amint az látható az L_{B1} és L_{B2} úton is fellép a mind a sebességváltozás mind a *Doppler-effektus*. (Ez az ugynevezett *merőleges Doppler-effektus* a speciális relativitás elmélete szerint csak *LORENTZ transzformáció* keretében tárgyalható.)

Következő lépésként megadhatók a *Doppler-effektus* következtében megváltozott frekvenciák a:

$$\begin{aligned}\omega_{2A1} &= \omega_0(1 - v_F/c_0) \\ \omega_{2A2} &= \omega_0(1 + v_f/c_0) \\ \omega_{2A3} &= \omega_{2A4} = \omega_0(1 - v_f/c_0)\end{aligned}\quad (9.35)$$

Mivel rendelkezésre állnak mind a karhossz $L_0 = \overline{0x} = \overline{0y}$, mind térfrekvencia értékek kiszámítható az egyes utakhoz tartozó összes fázisváltozás értéke:

Mindkét irányban a teljes térbeli fázisforgatás:

$$\begin{aligned}\Theta_{2A} &= -2k_0 L \\ \Theta_{2B} &= -2k_0 L\end{aligned}$$

$$\boxed{\Theta_{2A} = -2 \times 1.33 \times 10^6 \times 20 = -5.32 \times 10^7}$$

$$\boxed{\Theta_{2B} = -2 \times 1.33 \times 10^6 \times 20 = -5.32 \times 10^7}$$

Az eredő különbségi fázisforgatás:

$$\boxed{\Theta_{2e} = \Theta_{2A} - \Theta_{2B} \cong -5.32 \times 10^7 + 5.32 \times 10^7} \quad (9.36)$$

$$\boxed{\Theta_{2e} = 0} \quad (9.37)$$

- Ha $(L_{A1} + L_{A2})$ nem egyenlő $(L_{B1} + L_{B2})$ -vel az interferencia létrejön a beállítási folyamat során.

Azaz ha feltételezzük a GALILEI transzformáció alkalmazhatóságát és mérési környezetben nyugvó vagy nem létező „étert”, amelyben a fény terjed, úgy az interferométerben a befutott út után a két fénysugár között nincs fáziskülönbség. Ha elforgatjuk az interferométert természetesen a helyzet semmit sem változik és így az interferenciacsíkok eltolódása sem következik be.

Mindez az jelenti, hogy a MICHELSON – MORLEY féle interferenciakísérlet eredménye megegyezik a GALILEI transzformáció következetes alkalmazásának eredményével a gyorsuló mozgást nem végző, párhuzamos koordináta rendszerek esetében, s egyben a korábbi feltevésektől eltérően igazolja az interferenciarendszerek mozgásáról alkotott GALILEI transzformációk helyességét.

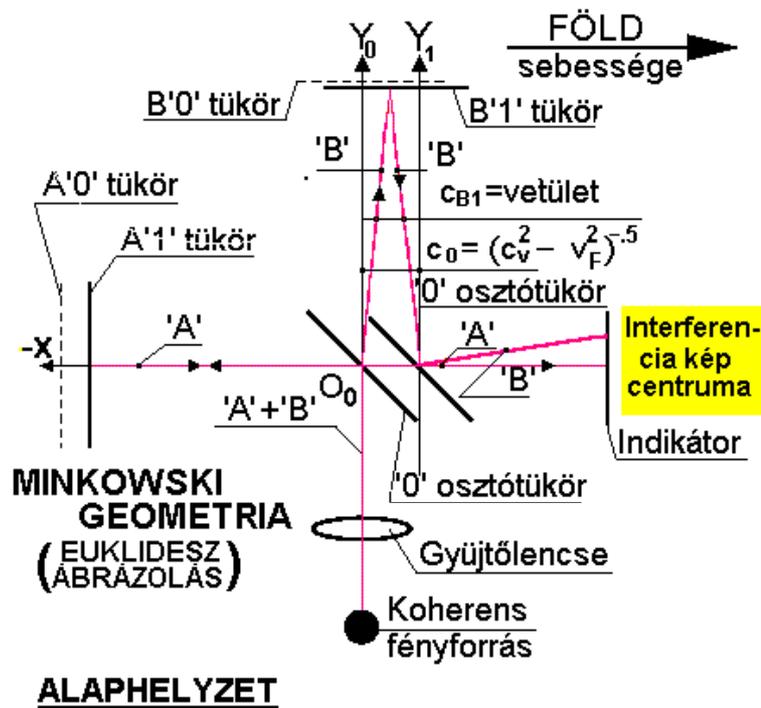
9.2. Minkowski geometria

Lorentz transzformáció

Amint azt már ismételtelen kifejtettem a fénysebesség jellegére vonatkozó számítások az interferencia jelenségén alapultak és azt állították: ha a fény sebessége változik úgy az interferencia képnek is változni kell. (Itt fel kell figyelni, hogy két fizikai jelenséget meglehetősen önkényes módon kezelnek: két fénynyaláb térbeli - időbeli szuperpozíciója illetve az eredő intenzitás érzékelése. A szuperpozíció ugyanis lineáris, míg az intenzitás mérés nem lineáris folyamat. Nem mindegy a két folyamat sorrendisége.) Bár a síkhullámkép sebességváltozásának következménye: az interferencia csíkok eltolódása, egyáltalán nem vették figyelembe, hogy mozgó testek és hullámok esetén mindig fellép a Doppler-effektus, amely a fázisviszonyokon alapuló értékelést befolyásolja.

A MICHELSON - MORLEY kísérlet éppen ilyen jellegű volt. A mérés eredményéből azt a következtetést vonták le, hogy mozgó testekhez rögzített koordináta-rendszerek távolságai és időtartamai az inerciarendszerek közti átszámításkor LORENTZ TRANSZFORMÁCIÓ-val számíthatók ki. Ehhez az a további állítás is elegendő volt, hogy a fénysebesség minden egyenesvonalú egyenletes mozgást végző koordináta-rendszerben azonos nagyságú. A LORENTZ TRANSZFORMÁCIÓ általános alkalmazásának bevezetésével megszületett a **speciális relativitás elmélete**. Éppen ezért szükséges megvizsgálni, hogy a LORENTZ TRANSZFORMÁCIÓ következetes alkalmazása milyen mérési eredményeket jósol meg a MICHELSON - MORLEY kísérlet esetében.

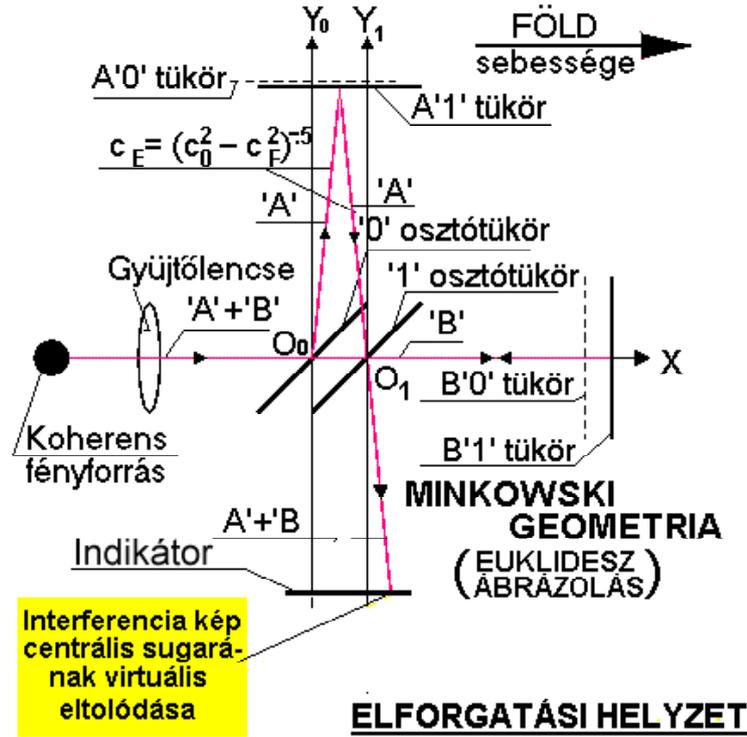
A *MINKOWSKI GEOMETRIA* azért vált a fizika részévé, mert *LORENTZ TRANSZFORMÁCIÓ* alkalmazása volt szükséges ahhoz, hogy a fénysebesség állandóságának elve teljesüljön az eltérő sebességű koordináta-rendszerek közti transzformáció során. A *MINKOWSKI GEOMETRIA* alapvető forgatása ugyanis nem más, mint a *LORENTZ TRANSZFORMÁCIÓ*. A fénysebesség állandósága viszont a *Maxwell* elméletéhez kapcsolható követelményeken kívül a *MICHELSON - MORLEY* kísérlet és a hozzá hasonló, de kevésbé pontos mérések eredményeiből következett. (Ismételtelen fel kell hívni a figyelmet, hogy a *Minkowski* geometria esetén a *hiperkomplex számok* szabályainak következetes használata elengedhetetlen.)



6.ábra. Michelson-Morley kísérlet: MINKOWSKI ALAPHELYZET.

Az 9.6.—9.7. ábrákon az $\overline{O_0B_1}$ és a $\overline{B_1O_1}$ jelű fényutak azaz a **B** jelű fényút virtuális vetületeként tekinthető a fény útjának, a koordináta rendszer síkjában, aminek oka a Föld bejelölt irányban való elmozdulása..

Az említett kísérletek során mindig a fényre kidolgozott síkhullám helyettesítő kép segítségével alakították ki a kísérlet matematikai modeljét. (A síkhullám nem más mint a kétdimenziós hullámegyenlet megoldása: olyan peremfeltételek mellett, hogy a hullám a negatív végtelenből a pozitív végtelenbe tart. Az okság elvének figyelembevételével a retardált hullámot fogadták el fizikai valóságnak.)



7. ábra. Minkowski geometria: ELFORGATÁSI HELYZET

A hullámmegoldás komplex alakjában a kitevő:

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 X = k_0 (c_0 T - X) \tag{9.38}$$

A cél olyan transzformációs formula megtalálása volt, amely a kifejezésében szereplő „c” értékét változatlanul hagyja, ez éppen a **Lorentz transzformáció** amely éppen úgy származtatható, a *Minkowski geometriából*, mint a *Galilei transzformáció* a *Galilei geometriából*. Ezen a transzformációk mindegyike forgatási transzformáció, amint az korábban is bemutattuk.

A jelzett kísérletben az elemi fénysugár teljes fázisváltozás úgy számítható ki, hogy a feltételezett **K nyugalmi**, vagy **Nap-rendszer**-ből, kétféle mozgó rendszerbe transzformáljuk az eredeti tér—idő változókat. A kétféle rendszer, melyben az elemi fénysugár halad, sebességét a Naphoz viszonyítva ismerjük a Föld pályamenti mozgásával párhuzamos és arra közel merőleges irányú sebességgel rendelkezik ($KR_A \Rightarrow v_A$ és $KR_B \Rightarrow v_B$, továbbiakban ezek mellett figyelembe kell venni a Föld sebességét v_F - nek jelöljük.).

A forgatási transzformációk, a hiperkomplex számok körében értelmezhetők, két téridő vektor s_A, s_B (amelyek fizikailag „tér szerű és idő szerű” komponensekből állnak) és értelemszerűen a K_A saját koordináta rendszer „ ct_A valamint x_A ” tengelyeken mért adataival jellemzett P_1 pont mozgását írja le, a forgatás során). Ezt az s_A vektort „v” sebességgel mozgó K_B koordináta-rendszer (ct_B és x_B) paramétereiből úgy kaphatjuk meg, hogy megszorozzuk $\vec{K_A K_B}$ egységvektorával s_e -vel K_B aktuális P_B -hez tartozó s_B (transzformálni kívánt) vektort. Ez az s_e egységvektor nem más mint a K_B inerciarendszert (téridősíkot) jellemző komplex sebességvektor, amely a K_B síkjában fekvő nyugvónak tekintett K_A origóját a K_B origójával összekötő s_{12} vektor egységvektora.

Meg kell jegyezni, hogy a hiperkomplex számok nem csupán két hanem négydimenziós formában is léteznek, mint kvaterniók, (vagy Caley számok). A kvaterniók:

$$U = a_0 + a_1I + a_2J + a_3K \quad \text{ahol} \quad (9.39)$$

$$I^2 = J^2 = K^2 = 0 \text{ vagy } -1; \quad s \quad IJ = -JI \quad (9.40)$$

A fentiek alapján a transzformáló vektor kiszámítása általánosan, a geometriai rendszertől függetlenül:

$$\mathbf{s}_e = \frac{\mathbf{s}_{12}}{|\mathbf{s}_{12}|}$$

(Itt figyelembe kell venni, hogy minden inerciális koordinátarendszer, párhuzamos eltolásokkal fedésbe hozható.)

Az így meghatározott Lorentz transzformáló egységvektor segítségével, amely szimmetrikus művelet.

Könnyen kiszámíthatók a \mathbf{K}_1 rendszerhez képest „v” sebességgel haladó \mathbf{K}_2 koordináta-rendszerbeli „t₂” és „x₂” paraméterek. Legyen a \mathbf{K}_1 rendszer adott pontjához tartozó komplex téridő vektor:

$$\mathbf{s}_1 = ct_1 + \mathbf{i}x_1$$

akkor

$$\boxed{a \text{ képzetes egység : } \mathbf{i}^2 = 1}$$

$$\mathbf{S}_{2T} = \mathbf{s}_e * \mathbf{s}_1$$

\mathbf{K}_{M2} origójának \mathbf{K}_{M1} -ben megadott komplex téridő vektora:

$$\mathbf{S}_{12} = c_0T_{12} + \mathbf{i}X_{12} \quad \text{ha} \quad c_0T_{12} \geq X_{12}$$

$$\mathbf{S}_{12} = X_{12} + \mathbf{i}c_0T_{12} \quad \text{ha} \quad X_{12} \geq c_0T_{12}$$

Komplex téridő-vektor abszolút értékei:

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}_{MT}| &= (c_0^2T_{12}^2 - X_{12}^2)^{1/2} = c_0T_{12}(1 - v_2^2/c_0^2)^{1/2} \\ c_0T_{12} &> X_{12} \end{aligned} \quad (9.41)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}_{MT}| &= (X_{12}^2 - c_0^2T_{12}^2)^{1/2} = c_0T_{12}(1 - c_0^2/v_2^2)^{1/2} \\ c_0T_{12} &< X_{12} \end{aligned} \quad (9.42)$$

Komplex transzformáló vektorok:

$$\mathbf{s}_{MT} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v/c_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \quad c_0t > x \quad (9.43)$$

$$\mathbf{s}_{MT} = \frac{c_0/v}{\sqrt{v^2/c_0^2 - 1}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{v^2/c_0^2 - 1}} \quad x < c_0t \quad (9.44)$$

A transzformáló vektorszorzás:

$$\mathbf{S}_{MT} = \mathbf{S}_2 * \mathbf{s}_{MT} \quad (9.45)$$

$$\mathbf{S}_{MT} = (ct_2 + \mathbf{i}x_2) \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_0/c_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \right) \quad (9.46)$$

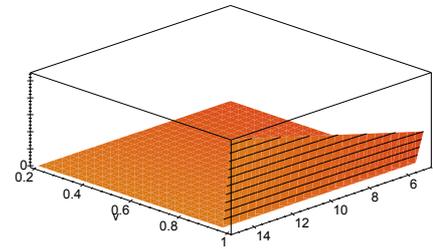
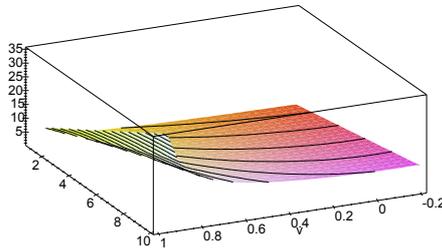
$$\mathbf{s}_{tM} = \frac{t_2 + x_2 v/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{x_2 + vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \quad (9.47)$$

Lorentz-Minkowski transzformáció: $ct > x$:

$$t_1 = \frac{t_2 + x_2 v/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \quad (9.48)$$

$$x_1 = \frac{x_2 + vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \quad (9.49)$$

Ezek a klasszikusnak számító Lorentz - transzformáció formulái.



Az idő transzformációja, ha $v = -0.2..1$; $t_2 = 1..10$. A tér transzformációja, ha $v = 0..1$, $x_2 = 5..15$

A nem klasszikus, fénysebességnél nagyobb sebesség esetén, azaz, amikor $x > ct$, a transzformált forgatott vektor:

$$\mathbf{S}_{tM} = (x_2 + \mathbf{i}c_0 t_2) \left(\frac{c_0/v}{\sqrt{v^2/c_0^2 - 1}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{v^2/c_0^2 - 1}} \right) \quad (9.50)$$

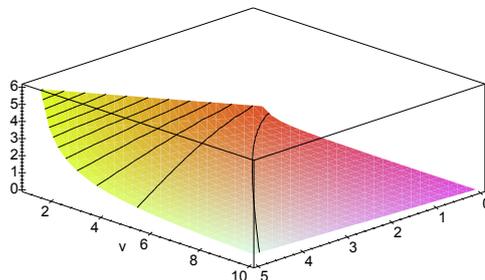
$$\mathbf{s}_{tM} = \frac{x_2 c_0/v + t_2 c_0}{\sqrt{v^2/c_0^2 - 1}} + \mathbf{i} \frac{x_2 + t_2 c_0^2/v}{\sqrt{v^2/c_0^2 - 1}} \quad (9.51)$$

Lorentz-Minkowski transzformáció: $x > ct$:

$$t_1 = \frac{x_2 c_0/v + t_2 c_0}{\sqrt{v^2/c_0^2 - 1}} \quad (9.52)$$

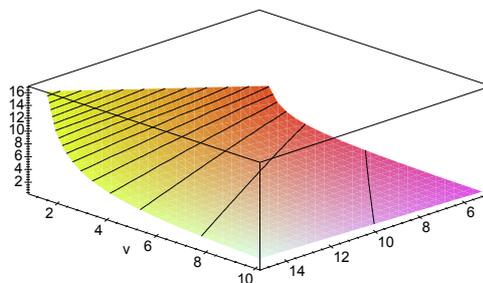
$$x_1 = \frac{x_2 + t_2 c_0^2/v}{\sqrt{v^2/c_0^2 - 1}} \quad (9.53)$$

$$t_1 = \frac{1/v + t_2}{\sqrt{v^2 - 1}} \quad \text{ábrázolva} \quad \Downarrow$$



Az idő transzformációja ha $v = 1..10$, $t_2 = 1..10$.

$$x_1 = \frac{x_2 + 1/v}{\sqrt{v^2 - 1}} \quad \text{ábrázolva} \quad \Downarrow$$

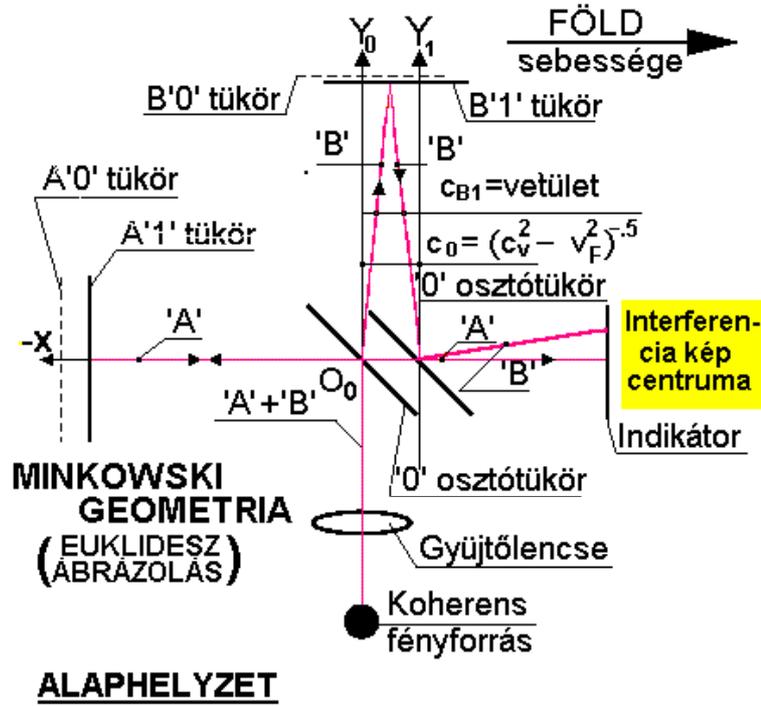


A tér transzformációja, ha $v = 1..10$, $x_2 = 5..15$.

Ezek a nemklasszikusnak számító Lorentz - transzformáció formulái, a tér - idő komponensek transzformáló összefüggése.

Ismételten felhívom a figyelmet arra, hogy **a fenti transzformációs formula nem más mint a Lorentz transzformáció abban az esetben ha $v > c_0$ vagyis a speciális relativitás elmélet szerinti nem létező esetre**, vagy másképpen a Lorentz transzformáció kibővítése a fénysebességnél nagyobb sebességek esetére.

9.2.1. ALAPHELYZET: 6., 8. ábra.



8.ábra. Michelson-Morley: MINKOWSKI ALAPHELYZET.

A Lorentz-transzformáció formulái, ha fénysugár iránya és a Föld „ v_F ” sebessége azonos irányú és párhuzamos, a koordináta rendszer origója az osztótükör „ 0_0 ” pontja, amely a fénysugár haladásának ideje alatt folyamatosan eltolódik, ugyanannyit tolik el az „ A_1 ” jelű tükör az L_{A1} alatti út megtételének ideje alatt, míg az L_{A2} alatti út megtétele alatt „ A_1 ” jelű tükör és az osztótükör „ 0_0 ”:

- Az eltolódás nagysága és figyelembe vétele:
- Az L_{A1} és L_{A2} jelű pályák esetében az „ x ” koordináta az osztótükör eltolódása következtében a tükör mindkét esetben „ $v_F t$ ” nagyságu utat tesz meg a fénysugárra merőleges irányban és ezen két befogó összege adja az átfogó nagyságát amit a fénysugár ténylegesen befut, azaz a megtett út $L_{B1} = y + b$, ahol $b = v_F t$.
- A transzformációs formulákban a fény sebességének iránya a visszaverődés után ellenkezőjére változik.

– Lorentz transzformáló vektorok, ha $ct > x$:

$$T = \frac{t_{B1} + L_{B1}v_F/v_{B1}^2}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \tag{9.54}$$

$$Y = \frac{L_{B1} + t_{B1}v_F}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}}$$

- A fenti transzfomációs formulákban a fénysebesség irányának előjele a felvett koordinátarendszerben kell értelmezni, tehát az oda-vissza út során mindig előjelet vált.
- A transzfomációs formulákban a fény sebességének iránya a visszaverődés után ellenkezőjére változik

A 8. ábra alapján négyféle útra kell kiszámítani az időket és a frekvenciákat: L_{A1} és L_{A2} a FÖLD translációs mozgásával párhuzamos, míg L_{B1} és L_{B2} arra közel merőleges.

$$\begin{aligned} L_{A1} &= \overline{O_0(A1tkr)} \\ L_{A2} &= \overline{(A1\ tükör)O_1} \\ L_{B1} &= \overline{O_0(B1\ tükör)} \\ L_{B2} &= \overline{(B1\ tükör)O_1} \end{aligned}$$

Itt tehát feltétlenül figyelembe kell venni, hogy a teljes számításba vett pálya:

A jelű pálya: a '0' osztótükör, A '1' tükör '1' osztótükör: 'A' sugár

B jelű pálya: a '0' osztótükör B '1' tükör '2' osztótükör: 'B' sugár

A pálya többi része csupán a mérés végrehajtásának elengedhetetlen kelléke.

9.2.2. „A” KARON MOZGÓ FÉNY

A FÖLD translációs mozgásával párhuzamos és ellentétes irányban:

Jellemző adatai : karhossz és a sebességek:

$$-L_{A1}, \quad -c_0 \quad v_f$$

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 X = k_0 (c_0 T - X)$$

$$\Theta_{2A1} = k_0 \frac{-c_0 t_{1A1} + L_{A1} v_F / c_0 + L_{A1} - v_F t_{1A1}}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}}$$

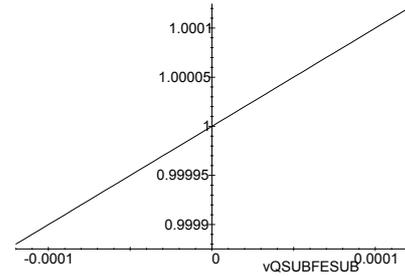
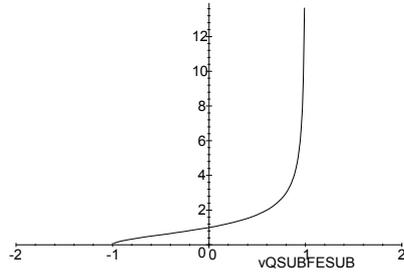
Az $\int \omega_0 t \equiv 0$ az indikáció (szemmel történő megfigyelés, fotolemez-exponálása) következtében, teljes térbeli fázisforgatás nagysága:

$$\Theta_{2A1} = k_0 L_{A1} \frac{1 + v_F / c_0}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \quad (9.55)$$

A v_F sebességgel azonos irányú Doppler effektus:

$$\omega_{2A1} = \omega_0 \frac{1/c_0 - v_F/c_0^2}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.56)$$

$$\boxed{\omega = \frac{1 - v_F}{\sqrt{1 - v_F^2}}} \text{ nagy lépték} \quad c_0 = 1; \quad \text{mikro lépték} \quad v_F = 0.0001 \text{ km/s}$$



Minkowski Doppler effektus nagy lépték: L_{A1} Minkowski Doppler effektus μ lépték: L_{A1}

A v_F sebességgel azonos irányú térfrekvencia változás:

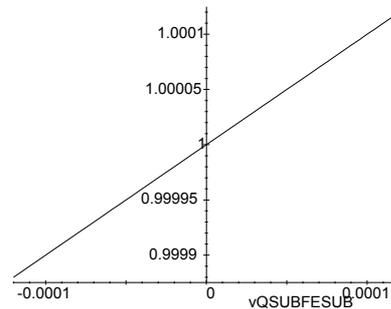
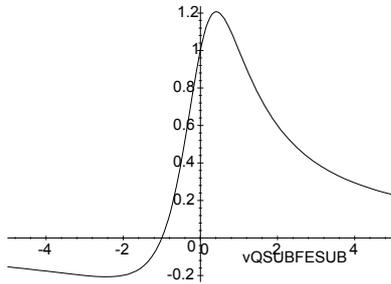
$$k_{2A1} = k_0 \frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \tag{9.57}$$

A v_F sebességgel azonos irányú fénysebesség:

$$c_{2A1} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_0}{k_0} \frac{1/c_0 + v_F/c_0^2}{1 + v_F/c_0} \cong c_0 \tag{9.58}$$

$c = \frac{1 + v_F}{1 + v_F^2}$

 nagy lépték $c_0 \equiv 1$; mikro lépték $v_F = 0.0001 \text{ km/s}$



Minkowski sebesség nagy léptékben: L_{A2} Mikowski sebesség μ léptékben: L_{A2}

A FÖLD translációs mozgásával párhuzamos, azonos irányban:

Jellemző adatai : karhossz és a sebességek:

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 X = k_0 (c_0 T - X) \tag{9.59}$$

$$\Theta_{2A2} = k_0 \frac{c_0 t_{1A2} - L_{A2} v_F / c_0 + L_{A2} - v_F t_{1A2}}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \tag{9.59}$$

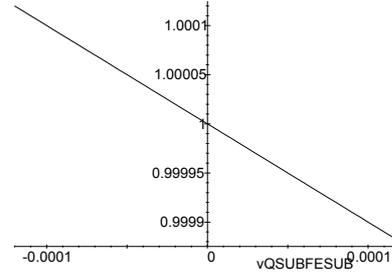
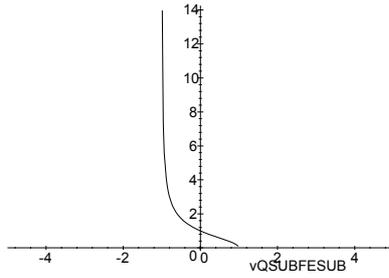
Az $\int \omega_0 t dt \equiv 0$ az indikáció (szemmel történő megfigyelés, fotolemez-exponálása) következtében, teljes térbeli fázisforgatás nagysága:

$$\Theta_{2A2} = k_0 L_{A2} \frac{1 - v_F / c_0}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \tag{9.60}$$

A v_F sebességgel azonos irányú Doppler effektus:

$$\omega_{2A2} = \omega_0 \frac{1/c_0 + v_F/c_0^2}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.61)$$

$$\boxed{\omega = \frac{1 + v_F}{\sqrt{1 - v_F^2}}} \quad \text{nagy lépték} \quad c_0 \equiv 1; \quad \text{mikro lépték} \quad v_F = 0.0001 \text{ km/s}$$



Mikowski Doppler effektus nagy lépték

Minkowski Doppler effektus μ lépték

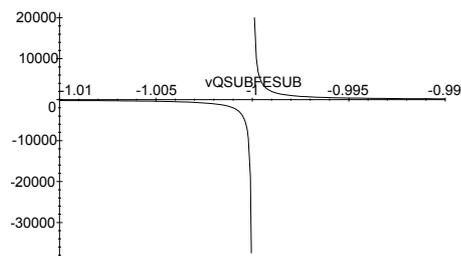
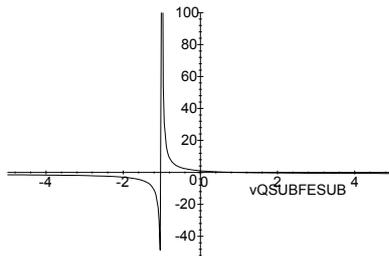
A v_F sebességgel azonos irányú térfrekvencia változás:

$$k_{2A2} = k_0 \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.62)$$

A v_F sebességgel azonos irányú Doppler-effektus:

$$c_{2A2} = \frac{\omega_0}{k_0} \frac{1/c_0 - v_F/c_0^2}{1 + v_F/c_0} \cong c_0 \quad (9.63)$$

$$\boxed{c = \frac{1 - v_F}{1 + v_F}} \quad \text{ha} \quad c_0 \equiv 1$$



Fénysebesség $-v_F$ esetén.

Fénysebesség kis $-v_F$ esetén.

Eredő fázisforgatás az „A” karon:

$$\Theta_{2A} = \Theta_{A1} + \Theta_{A2} = k_0 \left(L_{A1} \frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} + L_{A2} \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \right)$$

ha $L_{A1} \equiv L_{A2} \equiv L$

$$\begin{aligned}
\Theta_{2A} &= \Theta_{A1} + \Theta_{A2} = k_0 L \left(\frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} - \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \right) \\
\Theta_{2A} &= \Theta_{A1} + \Theta_{A2} = 2k_0 L \frac{v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \\
\Theta_{2A} &= 2k_0 L \frac{v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \tag{9.64}
\end{aligned}$$

Numerikusan:

$$\Theta_{2A} = 2 * 1.33 * 10^6 * 20 \frac{10^{-4}}{\sqrt{1 - 10^{-8}}} = 5.32 \times 10^7 \tag{9.65}$$

$$\Theta_{2A} = 5.32 \times 10^7 \text{ r} \tag{9.66}$$

9.2.3. „B” KARON MOZGÓ FÉNY

Az 8. ábra alapján kétféle útra kell kiszámítani az időket és a frekvenciákat: L_{B1} és L_{B2} a FÖLD translációs mozgásával párhuzamos, míg L_{A1} és L_{A2} arra közel merőleges.

$$\begin{aligned}
L_{B1} &= \overline{O_0(B1 \text{ tükör})} \\
L_{B2} &= \overline{(B1 \text{ tükör})O_1}
\end{aligned}$$

Itt tehát feltétlenül figyelembe kell venni, hogy a teljes számításba vett pálya:

Pálya: a '0' osztótükör B'1' tükör '2' osztótükör: 'B' sugár

A pálya többi része csupán a mérés végrehajtásának elengedhetetlen kelléke.

A Michelson-Morley kísérlet modelszámításakor, helytelen az az általános felfogás, hogy a számítások során csak a 't-y' és a 't-x' relációkban használjuk a *Minkowski* geometria hiperbólikus formuláit, mert a kísérlet háromdimenziós 't-x-y' téridőben játszódik le, és az 'x-y' jelentkező a 'c₀; v_F' merőleges sebességek összeadásait is hiperbolikus összeadás szabályai szerint kell végezni. S nem a speciális relativitás elméletben használt négyessebesség formula komponenseinek euklideszi típusú összeadása illetve az erre kialakított közelítő képlet

([36]Javorszkij-B.M.Detlaf: Fizikai Zsebkönyv. 600.o. Budapest. Műszaki Könyvkiadó, 1974.):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - (\mathbf{V}\mathbf{v}')\mathbf{v}'$$

elvileg is hibás, mivel a hiperbólikus 'xy' síkon a fenti ábra szerint is a v_F és a c_0 sebességek egymásra merőlegesek - ez a kísérlet fizikai megvalósításából következik - aminek következtében két össze nem adható elsőfajú v_F és másodfajú c_0 típusú mennyiségeket kell összegezni. Azonban a hiperbólikus számok körében erre két lehetőség is van:

Mint az ismeretes a Minkowski geometriának megfelelő hiperbólikus számok körében a vízszintes tengelyen lévő számokat elsőfajú számoknak, míg a függőleges tengelyen lévő számokat másodfajúaknak nevezik; ez megfelel a *valós és a képzetes* számok fogalmának, azzal külön feltétettel, hogy a *képzetes egység négyzete* $\equiv +1$. Azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy első és másodfajú számok saját típusával történő szorzata egyaránt elsőfajú számot ad. Egyben a abszolút értéke (ami megfelel a háromszög átfogójának és a befogói közti összefüggésnek) módosul a *képzetes fénysebesség* és a *valós Föld sebessége, mint befogókból számított eredő sebesség*, „ v_{B1} ” az abszolút értékének felel meg:

A v_{B1} és v_{B2} látszólagos sebességek, amelyek a mérés során keletkeznek úgy, hogy alatta a mérőrendszer elmozdul az $\overline{0_00_1}$ távolság a Minkowski geometriában kisebb, mint a Galilei és az Euklidesz-i geometriában

Az összefüggések:

$$v_{B1}^2 = c_0^2 - v_F^2 \quad (9.67)$$

$$v_{B1} = c_0 \sqrt{1 - v_F^2/c_0^2} \quad (9.68)$$

$$v_{B1}/c_0 = \sqrt{1 - v_F^2/c_0^2} \quad (9.69)$$

$$v_F = \sqrt{c_0^2 - c_{B1}^2} \quad (9.70)$$

A fentiek alapján a transzformációs formulák a fényhullám transzformációs formulái a Föld translációs sebességére merőleges irányba módosulni fognak:

$$Y = \frac{L_{B1} + t_{B1}v_F}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.71)$$

$$T = \frac{t_{B1} + L_{B1}v_F/c_0^2(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.72)$$

ahol $v_F = 30$ km/s azaz a Föld pályamenti sebessége

A fenti transzformációs formulák segítségével kiszámítható a merőleges irányú teljes fázisváltozás:

Az osztótükörtől a B'1' tükör felé:

Jellemző adatai : karhossz és a sebességek:

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 Y = k_0 (c_0 T - Y)$$

$$\Theta_{2B1} = k_0 \frac{c_0 t_{1B1} + (L_{B1}v_F/c_0^2(1 - v_F^2/c_0^2) - L_{B1} - t_{1B1}v_F)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.73)$$

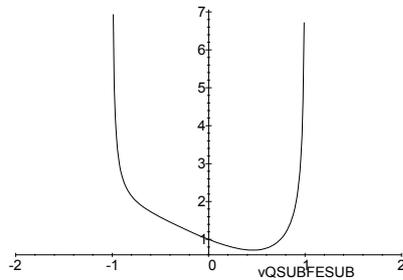
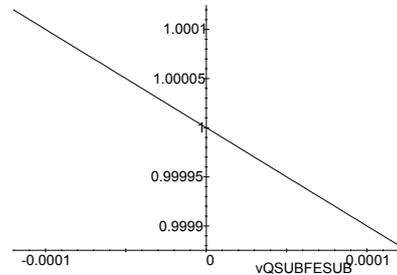
Az $\int \omega_0 t dt \equiv$ indikáció (szemmel történő megfigyelés, fotolemez-exponálása) következtében, teljes térbeli fázisforgatás nagysága:

$$\Theta_{2B1} = -k_0 L_{B1} \frac{1 - v_F/c_0^2(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.74)$$

A v_F sebességgel azonos Doppler effektus:

$$\omega_{2B1} = \omega_0 \frac{1/c_0 - v_F/c_0^3(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.75)$$

$$\boxed{\omega = \frac{1 - v_F(1 - v_F^2)}{\sqrt{1 - v_F^2}}} \text{ a nagy léptéknél } c_0 = 1; \text{ kis sebességnél } v_F = 10^{-4} km/s$$

Minkowski Doppler effektus nagy lépték: L_{B1} Minkowski Doppler effektus μ lépték: L_{B1}

mint az látható ezen az úton is fellép a Doppler effektus, amelyet az *Einstein*-i elmélet különleges eredményének tekintettek.

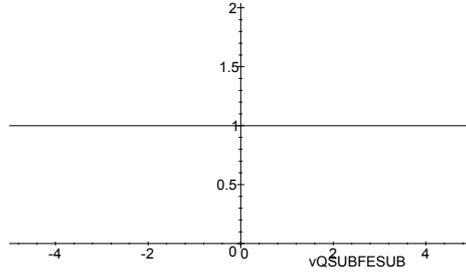
A v_F sebességgel azonos térfrekvencia-változás:

$$k_{2B1} = k_0 \frac{1 - v_F/c_0^2(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.76)$$

A v_F sebességre merőlegesen a fényhullám-csoport sebessége:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_0}{k_0} \frac{1/c_0 - v_F/c_0^3(1 - v_F^2/c_0^2)}{1 - v_F/c_0^2(1 - v_F^2/c_0^2)} \cong c_0 \quad (9.77)$$

$$\boxed{c = \frac{1 - v_F(1 - v_F^2)}{1 - v_F(1 - v_F^2)}} \quad \text{ha} \quad c_0 \equiv 1$$



Fénysebesség nagy v_F sebességek esetén

A „B” tükörtől az osztótükör '1' felé:

Jellemző adatai : karhossz és a sebességek:

$$L_{B2} = L_{B1} \quad c_0 \quad v_F$$

$$\Theta_{2B2} = \omega_0 T - k_0 Y = k_0 (c_0 T - Y) = \Theta_{B1}$$

Ennek következtében az eredő fázisforgatás **B** pályán:

$$\Theta_B = \Theta_{2B1} = -2k_0 L_{B1} \frac{1 - v_F/c_0^2 (1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.78)$$

Numerikusan:

$$\Theta_{2B} = -2 * 1.33 * 10^6 * 20 \frac{1 - 10^{-4}(1 - 10^{-8})}{\sqrt{1 - 10^{-4}}} = -5.3197 \times 10^7 \quad (9.79)$$

„A” és „B” PÁLYÁK EREDŐ FÁZISFORGATÁS ÖSSZEGE :

$$\Theta_{2ALAP} = -k_0 \left(2L_A \frac{v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} - 2L_B \frac{1 - v_F/c_0^2 (1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \right) \quad (9.80)$$

$$\Theta_{2ALAP} = -2k_0 L \left(\frac{v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} + \frac{1 - v_F/c_0^2 (1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \right) \quad (9.81)$$

ha $L_A = L_B = L$

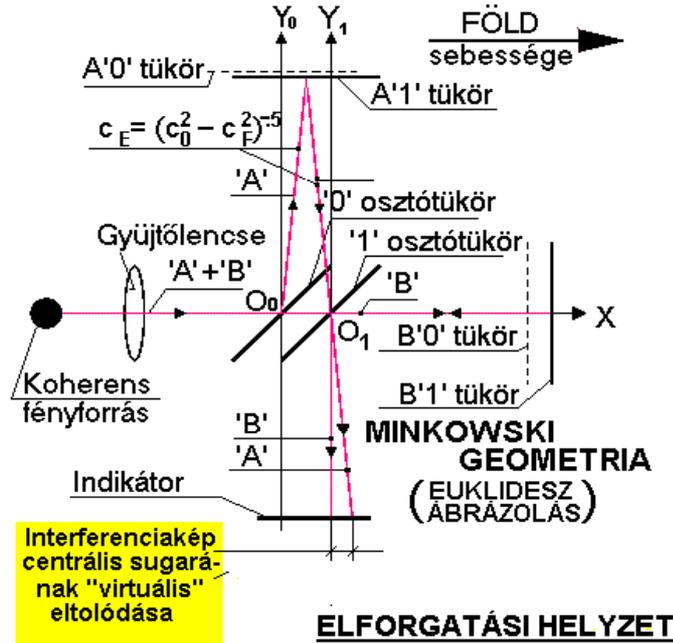
$$\Delta \Theta_{2ALAP} = -2k_0 L \left(\frac{1 + v_F/c_0 - v_F/c_0^2 \sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \right) \quad (9.82)$$

Numerikusan: $c_0 = 1$; $k_0 = 1.33 * 10^6$

$$\Delta \Theta_{2ALAP} = -2k_0 L \left(\frac{1 + v_F/c_0 - v_F/c_0^2 \sqrt{1 - v_F^2}}{\sqrt{1 - v_F^2}} \right)$$

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_{2ALAP} &= -2 * 1.33 * 10^6 * 20 \frac{1 + 10^{-4} - 10^{-4}\sqrt{1 - 10^{-8}}}{\sqrt{1 - 10^{-8}}} \\ \Delta\Theta_{2ALAP} &= -2 * 1.33 * 10^6 * 20 \frac{1 + 10^{-4} - 10^{-4}\sqrt{1 - 10^{-8}}}{\sqrt{1 - 10^{-8}}} = -5.32 \times 10^7 \\ \Delta\Theta_{2ALAP} &= -5.32 \times 10^7\end{aligned}\quad (9.83)$$

9.2.4. *ELFORGATÁSI HELYZET: 9. ábra.*



9.ábra. Michelson-Morley kísérlet: MINKOWSKI ELFORGATÁS .

A Lorentz-transzformáció formulái, ha a fénysugár iránya és a Föld „ v_F ” sebessége azonos irányú és párhuzamos, a kordinátarendszer origója az osztótükör „ 0_0 ” pontja, amely a fénysugár repülésének ideje alatt folyamatosan eltolódik, ugyanannyit tolik el az $A'1'$ jelű tükör az L_{A1} alatti út megtételének ideje alatt, míg az L_{A2} alatti út megtétele alatt $A'1'$ tükör és az osztótükör 0_1 :

- Az eltolódás nagysága és figyelembevétele:
- L_{B1} és L_{B2} jelű pályák megtétele során a Galilei tér-idő transzformáció az eltolódást a sebességek összeadásának lehetőségével veszi figyelembe.
- Az L_{A1} és L_{A2} jelű pályák esetében az „ x ” koordináta az osztótükör eltolódása következtében a tükör mindkét esetben „ $v_F t$ ” nagyságú utat tesz meg a fénysugárra merőleges irányban és ezen két befogó összege adja az átfogó nagyságát amit a fénysugár ténylegesen befut, azaz a megtett út $L_{B1} = y + b$, ahol $b = v_F t$.
- A transzformációs formulákban a fény sebességének iránya a visszaverődés után ellenkezőjére változik.
- A Lorentz transzformáló vektorok, ha $ct > x$:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{t_{B1} + L_{B1}v_F/v_{B1}^2}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \\
Y &= \frac{L_{B1} + t_{B1}v_F}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}}
\end{aligned} \tag{9.84}$$

- A fenti transzfomációs formulákban a fénysebesség irányának előjele a felvett koordinátarendszerben kell értelmezni, tehát az oda-vissza út során mindig előjelet vált.
- A transzfomációs formulákban a fény sebességének iránya a visszaverődés után ellenkezőjére változik

A 9. ábra alapján négyféle útra kell kiszámítani az időket és a frekvenciákat: L_{A1} és L_{A2} a FÖLD translációs mozgásával párhuzamos, míg L_{B1} és L_{B2} arra közel merőleges.

$$\begin{aligned}
L_{A1} &= \overline{O_0(A1tkr)} \\
L_{A2} &= \overline{(A1tkr)O_1} \\
L_{B1} &= \overline{O_0(B1tkr)} \\
L_{B2} &= \overline{(B1tkr)O_1}
\end{aligned}$$

Itt tehát feltétlenül figyelembe kell venni, hogy a teljes számításba vett pálya:
A jelű pálya: *a '0'osztótükör, A'1' tükör '1' osztótükör: 'A' sugár*
B jelű pálya: *a '0' osztótükör B'1' tükör '2' osztótükör: 'B' sugár*
A pálya többi része csupán a mérés végrehajtásának elengedhetetlen kelléke.

9.2.5. „B” KARON MOZGÓ FÉNY

A FÖLD translációs mozgásával párhuzamos, azonos irányban:

Jellemző adatai : karhossz és a sebességek:

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 X = k_0 (c_0 T - X)$$

$$\Theta_{2B1} = k_0 \frac{c_0 t_{1B1} + L_{B1}v_F/c_0 - L_{B1} - t_{1B1}v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \tag{9.85}$$

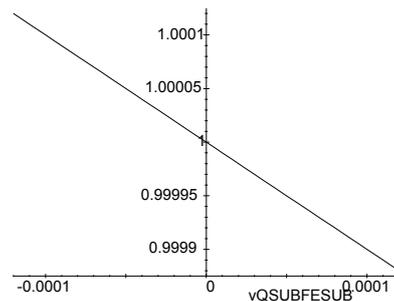
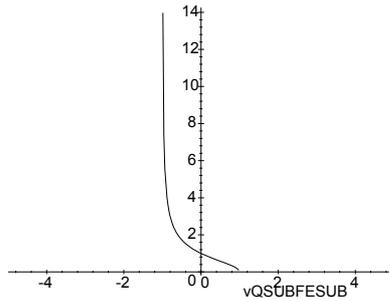
Az $\int w_0 t dt \equiv 0$ az indikáció (szemmel történő megfigyelés, fotolemez-exponálása) következtében, teljes térbeli fázisforgatás nagysága:

$$\Theta_{2B1} = -k_0 L_{B1} \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \tag{9.86}$$

A v_F sebességgel azonos irányú Doppler effektus:

$$\omega_{2B1} = \omega_0 \frac{1/c_0 - v_F/c_0^2}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \tag{9.87}$$

$$\boxed{\omega = \frac{1 - v_F}{\sqrt{1 - v_F^2}}} \text{ nagy lépték } c_0 \equiv 1; \text{ mikro lépték } v_F = 10^{-4} km/s$$



Minkowski Doppler effektus nagy lépték: L_{B1}

Minkowski Doppler effektus μ lépték: L_{B1}

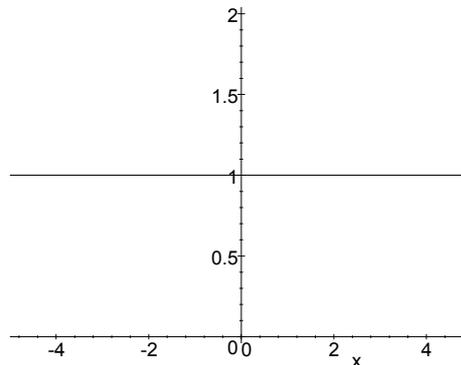
A v_F sebességgel azonos irányú térfrekvencia változás:

$$k_{2B1} = k_0 \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \tag{9.88}$$

A v_F sebességgel azonos irányú fénysebesség:

$$c_{2B1} = \frac{\omega_0}{k_0} \frac{1/c_0 - v_F/c_0^2}{1 - v_F/c_0} \cong c_0 \tag{9.89}$$

$$\boxed{c = \frac{1 - v_F}{1 - v_F}} \text{ ha } c_0 \equiv 1$$



Minkowski fénysebesség

A FÖLD translációs mozgásával párhuzamos és ellentétes irányban:

Jellemző adatai : karhossz és a sebességek:

$$-L_{B2} \quad - c_0 \quad v_F$$

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 X = k_0(c_0 T - X)$$

$$T = \frac{-c_0 t_{B2} - L_{B2} v_F / c_0}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \quad (9.90)$$

$$X = \frac{L_{B2} + v_F t_{B2}}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}}$$

$$\Theta_{2B2} = k_0 \frac{-c_0 t_{1B2} + L_{B2} v_F / c_0 + L_{B2} - v_F t_{1B2}}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}}$$

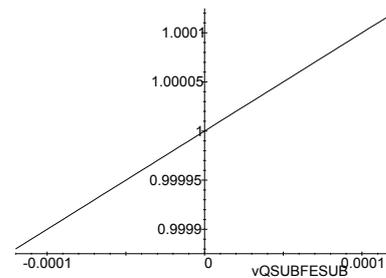
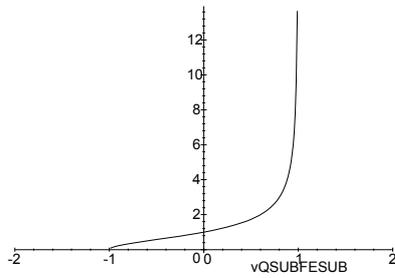
Az $\int w_0 t \equiv 0$ az indikáció (szemmel történő megfigyelés, fotolemez-exponálása) következtében, teljes térbeli fázisforgatás nagysága:

$$\Theta_{2B2} = k_0 L_{B2} \frac{1 + v_F / c_0}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \quad (9.91)$$

A sebességgel azonos irányú Doppler effektus:

$$\omega_{2B2} = \omega_0 \frac{1/c_0 - v_F/c_0^2}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.92)$$

$$\boxed{\omega = \frac{1 - v_F}{\sqrt{1 - v_F^2}}} \text{ nagy lépték} \quad c_0 \equiv 1; \text{ mikro lépték} \quad v_F = 10^{-4} c_0$$



Minkowski Doppler effek. nagy lépték: L_{B1} Minkowski Doppler effektus μ lépték: L_{B1}

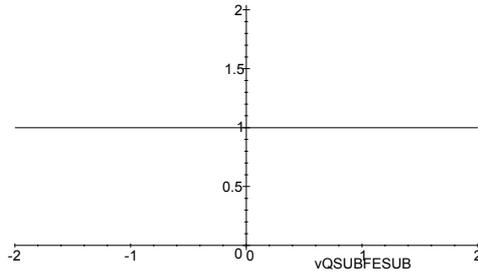
A v_F sebességgel azonos irányú térfrekvencia változás:

$$k_{2B2} = k_0 \frac{1 - v_F / c_0}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \quad (9.93)$$

A v_F sebességgel azonos irányú fénysebesség:

$$c_{2B2} = \frac{\omega_0}{k_0} \frac{1/c_0 - v_F/c_0^2}{1 - v_F/c_0} \cong c_0 \quad (9.94)$$

$$\boxed{c = \frac{1 - v_F}{1 - v_F}} \text{ ha } c_0 \equiv 1$$



Minkowski sebesség nagy léptékben

Eredő fázisforgatás az „B” karon:

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_{2B} = \Theta_{B1} + \Theta_{B2} = & -k_0 L_{B1} \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} + \\ & + k_0 L_{B2} \frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \end{aligned} \quad (9.95)$$

$$ha \quad L_{2B1} \equiv L_{B2} \equiv L_B$$

$$\Delta\Theta_{2B} = -2k_0 L_B \frac{v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.96)$$

Numerikusan:

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_{2B} &= 2 * 1.33 * 10^6 * 20 \frac{1}{\sqrt{1 - 10^{-8}}} = 5.32 \times 10^7 \\ \Delta\Theta_{2B} &= 5.32 \times 10^7 \end{aligned} \quad (9.97)$$

9.2.6. „A” KARON MOZGÓ FÉNY

Az 9. ábra alapján négyféle útra kell kiszámítani az időket és a frekvenciákat: L_{B1} és L_{B2} a FÖLD translációs mozgásával párhuzamos, míg L_{A1} és L_{A2} arra közel merőleges:

$$\begin{aligned} L_{A1} &= \overline{O_0(A1 \text{ tükör})} \\ L_{A2} &= \overline{(A1 \text{ tükör})O_1} \end{aligned}$$

Itt tehát feltétlenül figyelembe kell venni, hogy a teljes számításba vett pálya:

Pálya: a '0' osztótükör A '1' tükör '2' osztótükör: 'A' sugár

A pálya többi része csupán a mérés végrehajtásának elengedhetetlen kelléke.

A v_{A1} látszólagos sebesség, amely a mérés során abban jelentkezik, hogy az $\overline{O_0O_1}$ távolság a Minkowski geometriában kisebb, mint a Galilei és az Euklidesz-i geometriában.

Az összefüggések:

$$v_{A1} = \sqrt{c_0^2 - v_F^2} \quad (9.98)$$

$$v_{A1} = c_0 \sqrt{1 - v_F^2/c_0^2} \quad (9.99)$$

$$v_{A1}/c_0 = \sqrt{1 - v_F^2/c_0^2} \quad (9.100)$$

$$v_F = \sqrt{c_0^2 - c_{A1}^2} \quad (9.101)$$

A fentiek alapján a transzformációs formulák a fényhullám transzformációs formulái a Föld translációs sebességére merőleges irányba módosulni fognak:

$$Y = \frac{L_{A1} + v_{A1}t_{A1}}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}}$$

$$T = \frac{t_{A1} + L_{A1}v_{A1}/c_0^2(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.102)$$

ahol $v_F = 30$ km/s azaz a Föld pályamenti sebessége

A fenti transzformációs formulák segítségével kiszámítható a merőleges irányú teljes fázisváltozás:

$$\Theta_{A1} = k_0(c_0T - Y) \quad (9.103)$$

Az osztótükörtől a A'1' tükör felé:

Jellemző adatai : karhossz és a sebességek:

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 Y = k_0(c_0 T - Y)$$

$$\Theta_{2A1} = k_0 \frac{c_0 t_{1A1} + L_{A1} v_F / c_0^2 (1 - v_F^2 / c_0^2) - L_{A1} - t_{1A1} v_F^2}{\sqrt{1 - v_F^2 / c_0^2}} \quad (9.104)$$

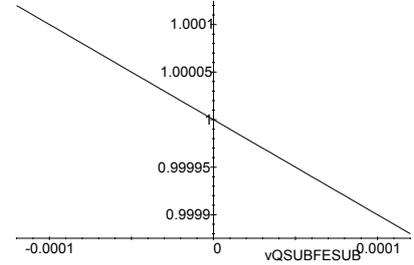
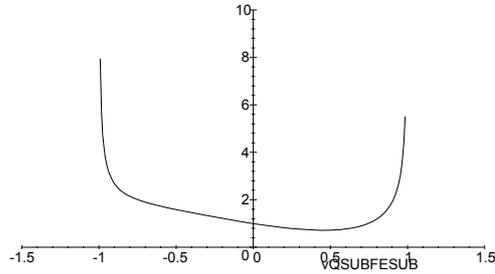
Az $\int \omega_0 t dt \equiv$ indikáció (szemmel történő megfigyelés, fotolemez-exponálása) következtében, teljes térbeli fázisforgatás nagysága:

$$\Theta_{2A1} = -k_0 L_{A1} \frac{1 - v_F/c_0^2(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.105)$$

A Föld sebességére merőleges irányú Doppler effektus:

$$\omega_{2A1} = \omega_0 \frac{1/c_0 - v_F/c_0^3(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \quad (9.106)$$

$$\omega = \frac{1 - v_F(1 - v_F^2)}{\sqrt{1 - v_F^2}} \quad \text{nagy sebesség } c_0 = 1; \text{ kis sebesség } v_F = 10^{-4} c_0$$



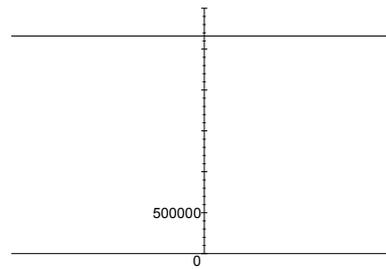
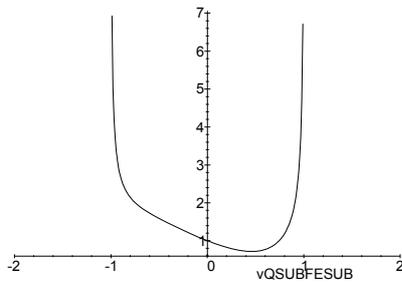
Minkowski Doppler effektus nagy sebességnél Minkowski Doppler effektus kis sebességnél.
 Amint az látható ezen az úton is fellép a Doppler effektus, amelyet az *Einstein*-i elmélet különleges eredményének tekintettek.

A v_F irányú térfrekvenencia-változás, ha v_F relatív értéke $\approx 10^{-4}$

$$k_{2A1} = k_0 \frac{1 - v_F(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \tag{9.107}$$

$$k_{2A1} = 1.33 * 10^6 \frac{1 - \sqrt{1 - v_F^2}}{\sqrt{1 - v_F^2}} = 2.66 * 10^6 \tag{9.108}$$

$$k = \frac{1 - v_F(1 - v_F^2)}{\sqrt{1 - v_F^2}}$$



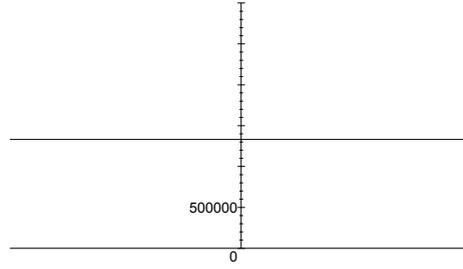
Minkowski térfrekvenecia változása.

$$-0.000012 \leq v_F \leq 0.000012$$

A Föld sebességére merőleges fényhullám-csoport sebessége:

$$c_{2A1} = \frac{\omega_0}{k_0} \frac{1/c_0 - v_F/c_0^3(1 - v_F^2/c_0^2)}{1 - v_F/c_0(1 - v_F^2/c_0^2)} = c_0 \tag{9.109}$$

$$c = \frac{1 - v_F(1 - v_F^2)}{1 - v_F(1 - v_F^2)} \quad \text{ha} \quad c_0 \equiv 1$$



$$-0.000012 \leq v_F \leq 0.00012$$

Az eredő fázisforgatás „A” pályán:

$$\begin{aligned} \Theta_{A1} &= \Theta_{A2} \\ \Theta_{2A} &= -2k_0L_A \frac{1 - v_F/c_0^2(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \end{aligned} \quad (9.110)$$

Numerikusan:

$$\Theta_A = -2 * 1.33 * 10^6 * 20 \frac{1 - 10^{-4}(1 - 10^{-8})}{\sqrt{1 - 10^{-8}}} \quad (9.111)$$

„A” és „B” PÁLYÁK EREDŐ FÁZISFORGATÁS ÖSSZEGE:

$$\Delta\Theta_{2ELF} = k_0 \left(2L_B \frac{v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} - 2L_A \frac{1 - v_F/c_0^2(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \right) \quad (9.112)$$

ha $L_A=L_B=L$

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_{2ELF} &= 2k_0L \left(\frac{v_F/c_0}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} - \frac{1 - v_F/c_0^2(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \right) \\ \Delta\Theta_{2ELF} &= -2k_0L \left(\frac{1 + v_F/c_0 - v_F/c_0^2(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \right) \end{aligned} \quad (9.113)$$

Numerikusan: $c_0 = 1; k_0 = 1.33 * 10^6$

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_{2ELF} &= 2k_0L \left(\frac{1 + v_F/c_0 - v_F/c_0^2(1 - v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v_F^2/c_0^2}} \right) = 2k_0L * KIF \\ \Delta\Theta_{2ELF} &= -2 * 1.33 * 10^6 * 20 \frac{1 + 10^{-4} - 10^{-4}(1 - 10^{-8})}{\sqrt{1 - 10^{-8}}} \\ \Delta\Theta_{2ELF} &= -5.32 \times 10^7 \end{aligned} \quad (9.114)$$

EREDŐ FÁZISKÜLÖNBÉSÉG A KÉT MÉRÉSI ÁLLAPOT KÖZÖTT:

$$\Delta\Theta_{2ERED\ddot{O}} = \Delta\Theta_{2ALAP} - \Delta\Theta_{2ELF} = (2k_0L - 2k_0L)KIF = 0 \quad (9.115)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_{2ERED\ddot{O}} &= \Delta\Theta_{2ALAP} - \Delta\Theta_{2ELF} = 5.32 * 10^7 - 5.32 * 10^7 \\ \Delta\Theta_{2ERED\ddot{O}} &= 0 \end{aligned} \quad (9.116)$$

Ha a karhosszak nem egyformák akkor a hullámhossz egészszámú többszörösével különböznek, az a fáziskülönbségre semmilyen érzékelhető hatást nem gyakorol.

A *Minkowski* geometria alapján így megkapott végeredmény ugyanúgy „0” mint *Galilei*-nek az étert feltételező klasszikus számításából adódó végeredménye, amely a mérés tényleges elvégzésének alapja volt. A mérés negatív eredménye (azaz a $\Delta\Theta_{ERED\ddot{O}} = 0$) az alábbi következményekkel jár:

1. Ha létezőnek tekintjük a feltételezett Naphoz rögzített koordináta rendszert, akkor a *Lorentz-transzformáció* helyes végeredményt ad, vagyis a Lorentz transzformáció alkalmas a jelenség helyes értékelésére, legalábbis *Michelson-Morley* kísérlet alapján, de nem mond ellen *GALILEI* feltételezésnek.
2. Ha a kísérletet úgy fogjuk fel, hogy **OA**₀ és **OB**₀ utak befutása két eltérő sebességű koordináta rendszerbeli viselkedést ír le, úgy a *Lorentz-transzformáció* alkalmatlan mivel a kiszámított eredményt a kísérlet végeredménye nem igazolja. Mindezekon túlmenően a levezetés menetéből az is kiténik, hogy a *Michelson-Morley* kísérlet az interferométer két karján fellépő *Doppler* effektusok különbségét méri.

• **Összefoglalva a számítás eredményét két lehetőség merül fel:**

A *Michelson-Morley* kísérlet mérési eredménye a *Lorentz-transzformáció* alapján, nem bizonyítja a speciális relativitás elméletét. Hogy a *Lorentz-transzformáció* által megjósolt eredmény igazi vagy nem az elforgatás közben bekövetkező interferenciacsík eltolódás megléte igazolhatná csak, ha fáziskülönbség zérussá válik. Erről azonban nincs érzékelhető adat.

Megjegyzésként ide kíváncozik, hogy a speciális relativitás elmélet megalkotásakor *Einstein* feltehetőleg nem vagy csak felületesen ismerte a *Michelson-Morley* kísérletet és eredményét.

9.3. Euklidesz geometria

A korábbiakban már részletesen tárgyalt formában megvizsgáltam, utána részletesen levezettem a 3 féle elemi geometria forgatási transzformációját, a *GALILEI* és *LORENTZ* transzformációk következetes alkalmazását a *MICHELSON - MORLEY* kísérlet elméleti modeljével kapcsolatban. S ezért elengedhetetlen (háromféle geometria és komplex számrendszer létezése következtében), hogy a *MICHELSON* -

MORLEY kísérlet várható eredményét ne csak a GALILEI és LORENTZ transzformációk alkalmazásával vizsgáljuk meg, hanem az EUKLIDESZ formulák alkalmazásával is. Ez annál inkább is indokolt, mivel komplex hullám épp az EUKLIDESZ formulák-hoz kapcsolódó komplex számrendszerben egzisztál, így a másik két transzformáció alkalmazásának jogosultsága eddigénél nem igazolódott.

Az EUKLIDESZ térre vonatkozó transzformációs formulák ismeretében a MICHELSON - MORLEY kísérlettel kapcsolatos számítások a korábbi sémák szerint elvégezhetők.

A jelzett kísérletben a teljes fázisváltozás úgy számítható ki, hogy a feltételezett **K nyugalmi-Nap** rendszerből, kétféle mozgó rendszerbe transzformáljuk az eredeti tér - idő változókat. A kétféle rendszer, melynek sebességét a Naphoz viszonyítva ismerjük a Föld pályamenti mozgásával párhuzamos és arra közel merőleges irányú sebességgel rendelkezik ($KR_A \Rightarrow v_A$ és $KR_B \Rightarrow v_B$).

A forgatás transzformációk, amik a komplex számok körében értelmezhetők, két téridő vektor \mathbf{s}_A s \mathbf{s}_B (amely fizikailag „tér szerű és idő szerű” komponensekből áll és értelemszerűen a \mathbf{K}_A saját koordináta rendszer „ct_A valamint x_A” tengelyeken mért adataival jellemzett \mathbf{P}_1 pont mozgását írja le, a forgatás során). A „v” sebességgel mozgó \mathbf{K}_{AB} koordináta-rendszer egységvektorával \mathbf{s}_e -vel \mathbf{K}_B pontjainak szorzása az aktuális \mathbf{P}_B -hez tartozó \mathbf{s}_B (transzformálni kívánt) vektornak. Ez az egységvektor nem más mint a \mathbf{K}_B inerciarendszert — téridősíkot jellemző komplex sebességvektor, a \mathbf{K}_B síkjában fekvő nyugvónak tekintett \mathbf{K}_A origóját a \mathbf{K}_B origójával összekötő \mathbf{s}_{12} vektor.

A fentiek alapján a transzformáló vektor kiszámítása általánosan, a geometriai rendszertől függetlenül:

$$\mathbf{s}_e = \frac{\mathbf{s}_{12}}{|\mathbf{s}_{12}|}$$

(Itt figyelembe kell venni, hogy minden inerciális koordinátarendszer, párhuzamos eltolásokkal fedésbe hozható. Viszont meg kell jegyezni, hogy ebben a vonatkozásban erősen eltér a másik két koordináta rendszertől. Ezenkívül fontos figyelembe venni, hogy a komplex számok sajátosságait feltétlenül figyelembe kell venni, mégha sokszor ez nem is érzékelhető.)

Az így meghatározott Euklidesz-féle transzformáló egységvektor segítségével könnyen kiszámíthatók a \mathbf{K}_A rendszerhez képest „v” sebességgel haladó \mathbf{K}_B koordináta-rendszerbeli „s₂ vektor komponensei „t₂ és x₂”. És \mathbf{K}_A rendszer adott pontjához tartozó komplex téridő vektor: \mathbf{s}_1 . A két rendszer közti különbség a Föld sebessége: v_F .

$$\mathbf{s}_1 = ct_1 + x_1$$

akkor

$$\mathbf{S}_{2T} = \mathbf{s}_e * \mathbf{s}_1$$

$$\boxed{\text{a képzetes egység : } \mathbf{i}^2 = -1}$$

K_{E2} origójának K_{E1} -ben megadott komplex téridő vektora:

$$\mathbf{S}_{12} = c_0 T_{12} + \mathbf{i} X_{12}$$

\mathbf{S}_{12} komplex téridő vektor abszolút értéke:

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}_0| &= (c_0^2 T_0^2 + X_0^2)^{1/2} = \\ |\mathbf{S}_0| &= c_0 T_0 (1 + v_F^2/c^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Komplex transzformáló vektor:

$$\mathbf{s}_{ET} = \frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_F/c}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \quad (9.117)$$

A transzformálódó vektor:

$$\mathbf{s}_2 = ct_2 + \mathbf{i}x_2$$

A transzformáló vektorszorzás:

$$\mathbf{S}_{TE} = \mathbf{s}_2 * \mathbf{s}_{ET}$$

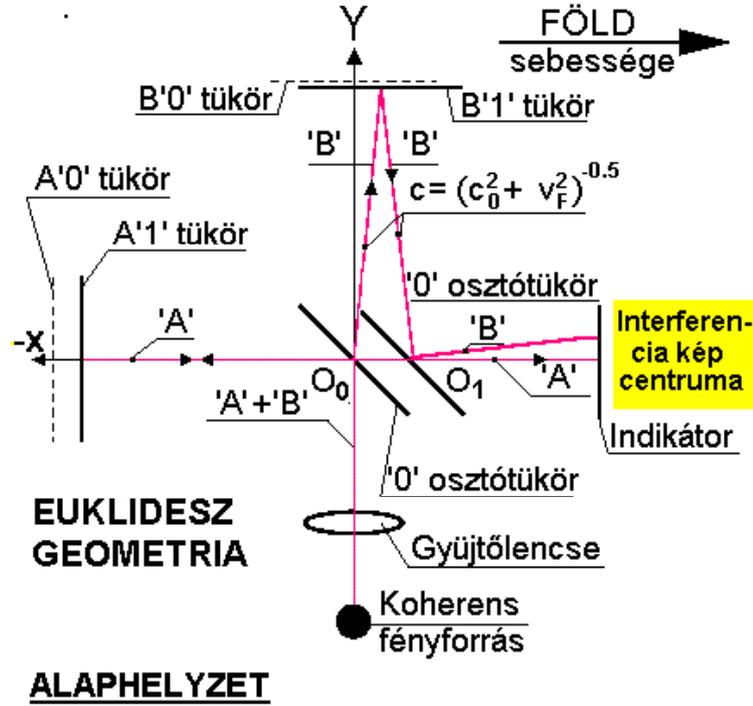
$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{tE} &= (c_0 t_2 + \mathbf{i}x_2) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \right) \\ \mathbf{S}_{tE} &= \frac{t_2 - x_2 v_F/c_0^2}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{x_2 + v_F t_2}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \end{aligned} \quad (9.118)$$

$$\boxed{t_1 = \frac{t_2 - x_2 v_F/c_0^2}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}} \quad (9.119)$$

$$\boxed{x_1 = \frac{x_2 + t_2 v_F}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}}$$

- A fenti transzfomációs formulákban a fénysebesség irányának előjelét a felvett koordinátarendszerben kell értelmezni, tehát az oda-vissza út során mindig előjelet vált.
- Azaz a transzfomációs formulákban a fény sebességének iránya a visszaverődés után ellenkezőjére változik

A továbbiakban ezeket a formulákat **Euklidesz transzformáció**-nak fogom nevezni és ki fog derülni, ugyanúgy lehet őket használni mint *Galilei* és a *Minkowszki-Lorentz* transzformációkat.



10.ábra. Michelson-Morley kísérlet: EUKLIDESZ ALAPHELYZET.

9.3.1. ALAPHELYZET: 10. ábra.

Az 3. ábra alapján négyféle útra kell kiszámítani az időket és a frekvenciákat: L_{A1} és L_{A2} a FÖLD translációs mozgásával párhuzamos, míg L_{B1} és L_{B2} arra közel merőleges.

$$\begin{aligned} L_{A1} &= \overline{O_0(A1 \text{ tükör})} \\ L_{A2} &= \overline{(A1 \text{ tükör})O_1} \\ L_{B1} &= \overline{O_0(B1 \text{ tükör})} \\ L_{B2} &= \overline{(B1 \text{ tükör})O_1} \end{aligned}$$

Itt tehát feltétlenül figyelembe kell venni, hogy a teljes számításba vett pálya:

„A” jelű pálya: a '0' osztótükör, A'1' tükör '1' osztótükör: 'A' sugár

„B” jelű pálya: a '0' osztótükör B'1' tükör '2' osztótükör: 'B' sugár

A pálya többi része csupán a mérés végrehajtásának elengedhetetlen kelléke.

A síkhullám[†] megoldás komplex alakjának a kitevője:

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 X = k_0 (c_0 T - X) \quad (9.120)$$

[†]Emlékeztetni szeretném az olvasót, hogy az I.részben részletes elemzés szerepel az alkalmazott síkhullám jelen feladatbeli alkalmatlanságára.

9.3.2. MOZGÁS AZ „A” KARON: 10. ábra.

A Föld sebességével ellentétes irányban:

Jellemző adatai, karhossz és a sebességek:

$$-L_{A1} \quad -c_0 \quad v_F$$

$$\Theta_{2A1} = \omega_0 T - k_0 X = k_0(c_0 T - X)$$

$$\Theta_{2A1} = k_0 \frac{-c_0 t_{1A1} - L_{A1}(v_F/c_0) + L_{A1} - v_F t_{1A1}}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

Az $\int \omega_0 t \equiv 0$ az indikáció (szemmel történő megfigyelés, fotólemez exponálás) következtében a teljes térbeli fázisforgatás nagysága:

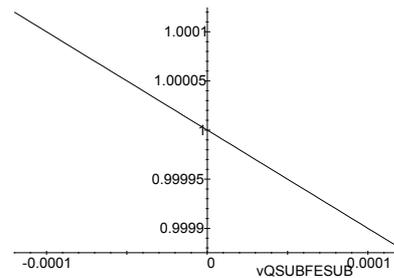
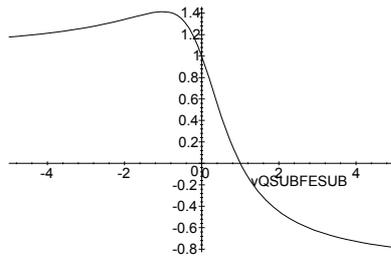
$$\Theta_{2A1} = k_0 L_{A1} \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \tag{9.121}$$

A sebességgel azonos irányú Doppler effektus:

$$\omega_{2A1} = \omega_0 \frac{1/c_0 - v_F/c_0^2}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

$\frac{1 - v_F}{\sqrt{1 + v_F^2}}$

 nagy lépték: $c_0 \equiv 1$; mikro lépték: $v_F = 0.0001 \quad c_0$



Euklidesz Doppler effektus nagy lépték: L_{A1} Euklidesz Doppler effektus μ lépték: L_{A1}

A sebességgel azonos irányú térfrekvencia változás:

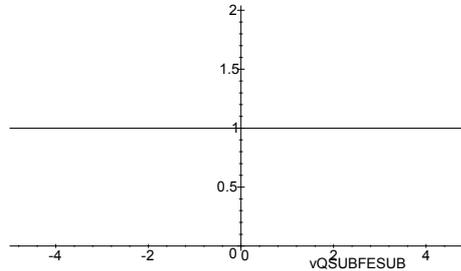
$$k_{2A1} = k_0 \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \tag{9.122}$$

A sebességgel azonos irányú fény csoportsebessége:

$$c_{2A1} = \frac{\omega_{A1}}{k_{A1}} = \frac{\omega_0 (1/c_0 - v_F/c_0^2)}{k_0(1 - v_F/c_0)}$$

$$c_{2A1} = c_0 \frac{1/c_0 - v_F/c_0^2}{1 - v_F/c_0} \tag{9.123}$$

ha
$$c = \frac{1 - v_F}{1 + v_F}$$
 és $c_0 \equiv 1$



Euklidesz-i fénysebesség.

A Föld mozgásával azonos irányban:

Jellemző adatai, karhossz és a sebességek:

$-L_{A1} \quad c_0 \quad v_F$

$$\begin{aligned} \Theta_{2A2} &= \omega_0 T - k_0 X = k_0 (c_0 T - X) \\ \Theta_{2A2} &= k_0 \frac{c_0 t_{1A2} + L_{A2}(v_F/c_0) + L_{A2} - v_F t_{1A2}}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \\ \Theta_{2A2} &= k_0 L_{A2} \frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \end{aligned} \tag{9.124}$$

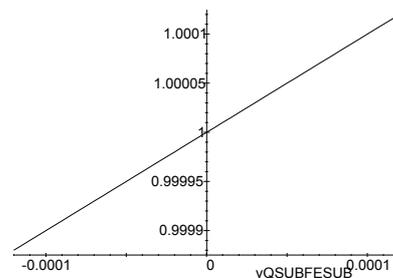
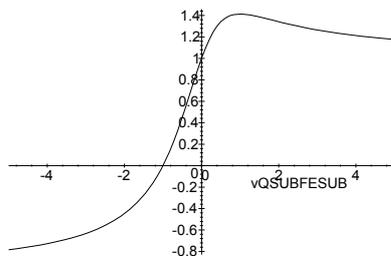
Az $\int \omega_0 t \equiv 0$ az indikáció (szemmel történő megfigyelés, fotólemez exponálás) következtében a teljes térbeli fázisforgatás nagysága.

A v_F sebességgel ellentétes irányú Doppler effektus:

$$\omega_{2A2} = \omega_0 \frac{1/c_0 + v_F/c_0^2}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

$$\omega = \frac{1 + v_F}{\sqrt{1 + v_F^2}}$$

nagy lépték $c_0 \equiv 1$; mikro lépték $v_F = 10^{-4} c_0$



Euklidesz Doppler effektus nagy lépték: L_{A2}

Euklidesz Doppler effektus μ lépték: L_{A2}

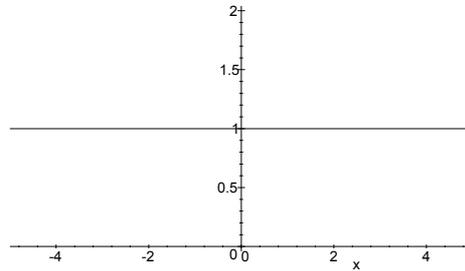
A v_F sebességgel ellentétes irányú térfrekvencia változás:

$$k_{2A2} = k_0 \frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

A v_F sebességgel ellentétes irányú fény csoportsebessége:

$$c_{2A2} = \frac{\omega_{A2}}{k_{A2}} = \frac{\omega_0 (1/c_0 + v_F/c_0^2)}{k_0 (1 + v_F/c_0)} \quad (9.125)$$

$$\boxed{c = \frac{1 + v_F}{1 + v_F}} \quad \text{ha} \quad c_0 \equiv 1$$



Euklidesz sebesség: L_{A2}

Az összes fázis változás az „A” karon:

$$\begin{aligned} \Theta_{2A} &= \Theta_{2A1} + \Theta_{2A2} = k_0 L_{A1} \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} + k_0 L_{A2} \frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \\ \text{ha } L_{A1} &= L_{A2} = L \\ \Theta_{2A} &= 2k_0 L_A \frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \end{aligned}$$

9.3.3. *MOZGÁS A „B” KARON: 10.ábra.*

A Föld mozgására merőleges irányban:

A fénysebességnek, „ c_B ”-nek az $\overline{O_0B_1}$ és $\overline{BO_1}$ irányú nagysága, eltérően a korábban tárgyalt esetektől:

$$\begin{aligned} v_{B1}^2 &= c_0^2 + v_F^2 \\ v_{B1} &= \sqrt{c_0^2 + v_F^2} \\ v_{B1} &= c_0 \sqrt{1 + v_F^2/c_0^2} \end{aligned}$$

Az Euklidesz-i transzformációs formulák a merőleges irányban:

Jellemző adatai, karhossz és a sebességek:

$$L_{B1} \quad c_0 \quad v_F$$

Behelyettesítve „ v_{B1} ” értékét:

$$T_{B1} = \frac{t_{B1} - L_{B1}v_F/v_{B1}^2}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

$$Y_{B1} = \frac{L_{B1} + t_{B1}v_{A1}}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

$$\Theta_{2B1} = \omega_0 T - k_0 X = k_0(c_0 T - Y)$$

$$\Theta_{2B1} = k_0 \frac{c_0 t_{1B1} - L_{B1}v_F/c_0^2(1 + v_F^2/c_0^2) - L_{B1} - t_{1B1}c_0(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

Az $\int \omega_0 t \equiv 0$ az indikáció (szemmel történő megfigyelés, fotólemez exponálás) következtében a teljes térbeli fázisforgatás nagysága:

$$\Theta_{2B1} = -k_0 L_{B1} \frac{1 + v_F/c_0^2(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \quad (9.126)$$

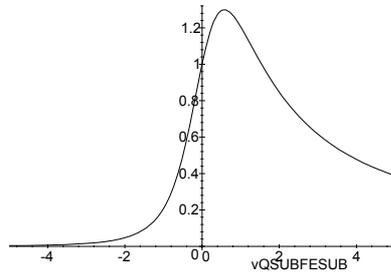
$$\Theta_{2B2} \equiv \Theta_{2B1} = -2k_0 L_{B1} \frac{1 + v_F/c_0^2(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \quad (9.127)$$

A v_F sebességre merőleges irányú Doppler effektus:

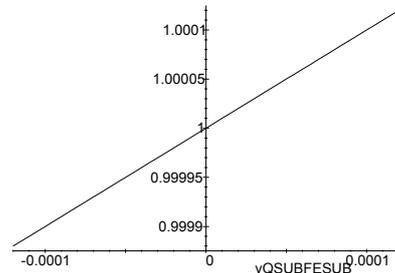
$$\omega_{2B1} = \omega_0 \frac{1/c_0 + v_F/c_0^3(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

$$\omega = \frac{1 + v_F/(1 + v_F^2)}{\sqrt{1 + v_F^2}}$$

nagy lépték $c_0 \equiv 1$; mikro lépték $v_F = 10^{-4} c_0$



Euklidesz Doppler effektus nagy lépték: L_{B1}



Euklidesz Doppler effektus μ lépték: L_{B1}

A v_F sebességre merőleges irányú térfrekvencia változás:

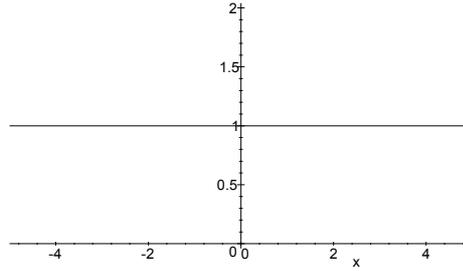
$$k_{2B1} = k_0 \frac{1 + v_F/c_0^2(1 + v_F^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \quad (9.128)$$

A v_F sebességre merőleges irányú fény csoportsebessége:

$$c_{2B1} = \frac{\omega_{2B1}}{k_{2B1}} = \frac{\omega_0(1/c_0 + v_F/c_0^2(1 + v_F^2))}{k_0(1 + v_F/c_0^2(1 + v_F^2))} = c_0 \frac{1/c_0 + v_F/c_0^2(1 + v_F^2)}{1 + v_F/c_0^2(1 + v_F^2)} \quad (9.129)$$

$$c_{2B1} = c_0 \quad (9.130)$$

$$\boxed{c = \frac{1 + v_F(1 + v_F^2)}{1 + v_F(1 + v_F^2)}} \quad \text{ha } c_0 \equiv 1$$



Euklidesz-i fénysebesség.

ÖSSZEGZÉS AZ ALAPHELYZET FÁZISVÁLTOZÁSÁRA:

Összegezve az „A” jelű tükörhöz tartozó út teljes fázisváltozását:

$$\Theta_{2A} = \Theta_{2A1} + \Theta_{2A2} = -k_0 L_{A1} \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} - k_0 L_{A2} \frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

$$\text{Ha } L_{2A1} = L_{2A2} = L$$

$$\Theta_{2A} = 2k_0 L \frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \quad (9.131)$$

Összegezve a „B” jelű tükörhöz kapcsolódó út fázisváltozását:

$$\Theta_{2B} = \Theta_{2B1} + \Theta_{2B2} = -2k_0 L_{B1} \frac{1 - v_F/c_0^2(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

$$\text{Ha } L_{2B1} = L_{2B2} = L$$

$$\Theta_{2B} = -2k_0 L \frac{1 + v_F/c_0^2(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \quad (9.132)$$

A KÉT ÚT KÖZTI FÁZISKÜLÖNBSÉG:

$$\Delta\Theta_{2ALAP} = \Theta_{2A} - \Theta_{2B} = 2k_0 L \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} - \frac{1 - v_F/c_0^2(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \right) \quad (9.133)$$

normálva $c_0 = 1$

$$\Delta\Theta_{2ALAP} = \Theta_{2A} - \Theta_{2B} = 2k_0L \left(\frac{1}{\sqrt{1+v_F^2}} - \frac{1-v_F/(1+v_F^2)}{\sqrt{1+v_F^2}} \right)$$

Numerikusan:

A fenti $\Delta\Theta_{ALAP}$ képlete alapján ha a karhossz és a c_0 :

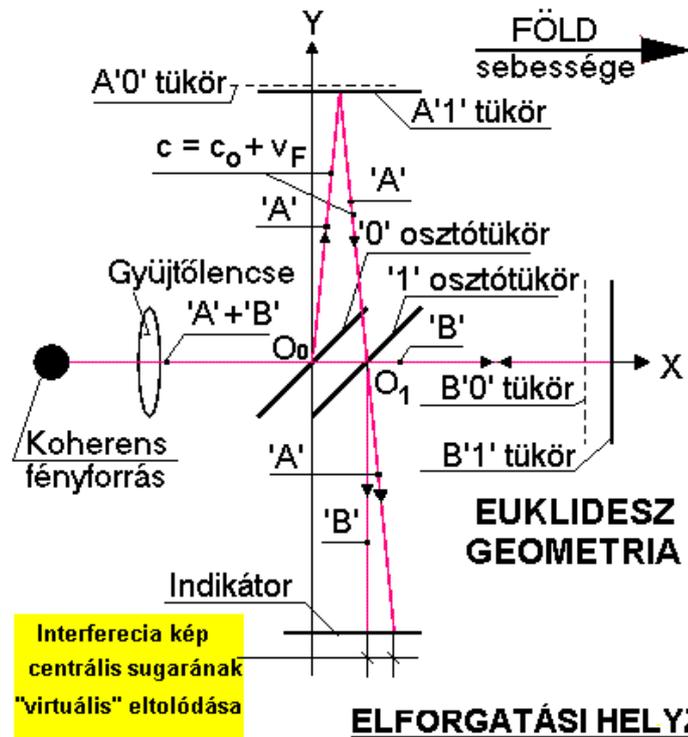
$$L_0 = 10 \text{ m}; k_0 = 1.3 \cdot 10^6 \text{ és } v_F = 30 \text{ km/s illetve}$$

$$c_0 = 300000 \text{ km/s értékre normálva } v_F = 0.0001$$

$$\Delta\Theta_{2ALAP} = \Theta_{2A} - \Theta_{2B} = 2 \cdot 1.33 \cdot 10^6 \cdot 20 \left(\frac{10^{-4}}{\sqrt{1+10^{-8}}} - \frac{1-10^{-4}/(1+10^{-8})}{\sqrt{1+10^{-8}}} \right)$$

$$\Delta\Theta_{2ALAP} = 5.32 \cdot 10^7$$

9.3.4. *ELFORGATÁSI HELYZET: 11. ábra.*



11. ábra. Michelson-Morley kísérlet: EUKLIDESZ ELFORGATÁS.

9.3.5. MOZGÁS A „B” KARON

A Föld mozgásával azonos irányban:

Jellemző adatai, karhossz és a sebességek:

$$L_{B1} \quad c_0 \quad v_F$$

$$\Theta_{2B1} = \omega_0 T - k_0 X = k_0 (c_0 T - X)$$

$$\Theta_{2B1} = k_0 \frac{c_0 t_{1B1} - c_0 L_{B1} (v_F/c_0^2) - L_{B1} - v_F t_{1B1}}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

Az $\int \omega_0 t \equiv 0$ az indikáció (szemmel történő megfigyelés, fotólemez exponálás) következtében a teljes térbelifázisforgatás nagysága:

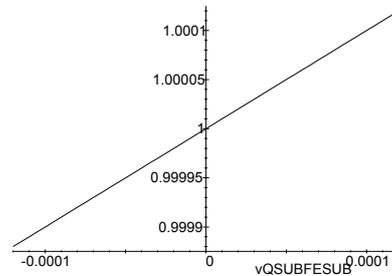
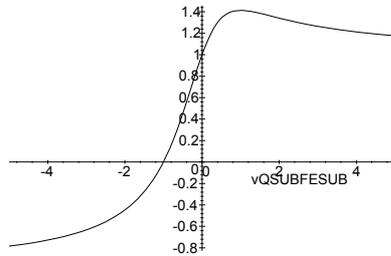
$$\Theta_{2B1} = -k_0 L_{B1} \frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \tag{9.134}$$

A v_F sebességgel azonos irányú Doppler effektus:

$$\omega_{2B1} = \omega_0 \frac{1/c_0 + v_F/c_0^2}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \tag{9.135}$$

$\omega = \frac{1 + v_F}{\sqrt{1 + v_F^2}}$

 nagy lépték $c_0 \equiv 1$; mikro lépték $v_F = 10^{-4} \text{ km/s}$



Euklidesz Doppler effektus nagy lépték: L_{B1} Euklidesz Doppler effektus μ lépték: L_{B1}

A v_F sebességgel azonos irányú térfrekvencia változás:

$$k_{2B1} = k_0 \frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \tag{9.136}$$

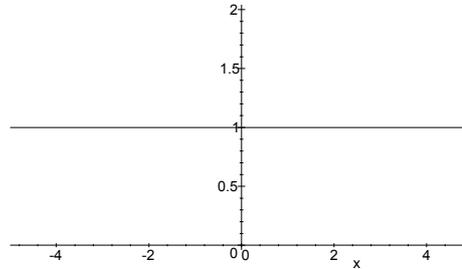
A v_F sebességgel azonos irányú fény csoportsebessége:

$$c_{2B1} = \frac{\omega_{2B1}}{k_{2B1}} = \frac{\omega_0 (1/c_0 + v_F/c_0^2)}{k_0 (1 + v_F/c_0)}$$

$$c_{2B1} = c_0 \frac{1/c_0 + v_F/c_0^2}{1 + v_F/c_0} \tag{9.137}$$

Ha normáljuk $c_0 = 1 - re$, a c_{B1} kifejezést, akkor az alábbi két ábrán, jól értékelhető $c_{2B1} = c_{B1}(v_F)$ függvény menete:

$$\boxed{c = c_0 \frac{1 + v_F}{1 - v_F}} \quad \text{ha} \quad c_0 \equiv 1$$



Euklidesz fénysebesség nagy léptékben.

A Föld mozgásával ellentétes irányban:

Jellemző adatai, karhossz és a sebességek:

$$-L_{B2} \quad -c_0 \quad v_F$$

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 X = k_0(c_0 T - X)$$

$$\Theta_{2B2} = k_0 \frac{-c_0 t_{1B2} - L_{B2} v_F / c_0 + L_{B2} - v_F t_{1B2}}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}}$$

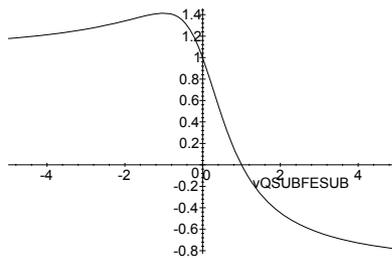
Az $\int \omega_0 t \equiv 0$ az indikáció (szemmel történő megfigyelés, fotólemez exponálás) következtében a teljes térbeli fázisforgatás nagysága:

$$\Theta_{2B2} = k_0 L_{B2} \frac{1 - v_F / c_0}{\sqrt{1 + v_F^2 / c_0^2}} \tag{9.138}$$

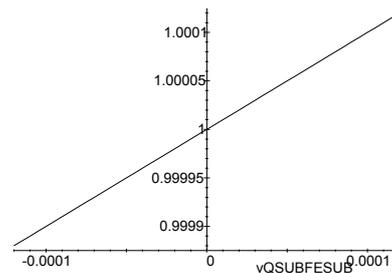
A sebességgel ellentétes irányú Doppler effektus:

$$\omega_{2B2} = \omega_0 \frac{1/c_0 - v_F/c_0^2}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{1 - v_F}{\sqrt{1 + v_F^2}}} \quad \text{nagy lépték } c_0 \equiv 1; \quad \text{mikro lépték } v_F = 10^{-4} \text{ km/s}$$



Euklidesz Doppler effektus nagy lépték: L_{B2}



Euklidesz Doppler effektus μ lépték: L_{B2}

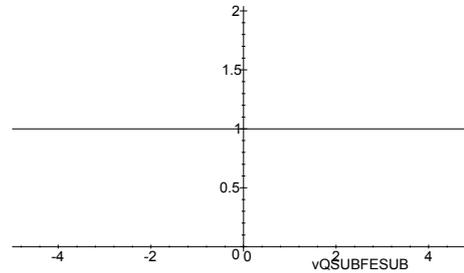
A v_F sebességgel ellentétes irányú térfrekvencia változás:

$$k_{2B2} = k_0 \frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

A v_F sebességgel ellentétes irányú fény csoportsebessége:

$$c_{2B2} = \frac{\omega_{2B2}}{k_{2B2}} = \frac{\omega_0 (1/c_0 + v_F/c_0^2)}{k_0 (1 + v_F/c_0)} \quad (9.139)$$

$$\boxed{c = \frac{1 + v_F}{1 + v_F}} \quad \text{ha} \quad c_0 \equiv 1$$



Euklidesz-i fénysebesség nagy léptékben.

Az összes fázisszög változás a „B” karon:

$$\Theta_{2B} = \Theta_{2B1} + \Theta_{2B2} = -k_0 L_{B1} \frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} + k_0 L_{B2} \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \quad (9.140)$$

$$\text{ha } L_{B1} = L_{B2} = L$$

$$\Theta_{2B} = -2k_0 L \frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \quad (9.141)$$

9.3.6. MOZGÁS AZ „A” KARON

A Föld mozgására merőleges irányban:

Jellemző adatai, karhossz és a sebességek:

$$L_{A1} \quad c_0 \quad v_F \quad (9.142)$$

„ c_0 ” - nek az $\overline{O_0A1}$ és $\overline{A1O_1}$ irányú nagysága:

$$\begin{aligned} c_{A1}^2 &= c_0^2 + v_F^2 \\ c_{A1} &= \sqrt{c_0^2 + v_F^2} \\ c_{A1} &= c_0 \sqrt{1 + v_F^2/c_0^2} \end{aligned}$$

Az euklideszi transzformációs formulák a merőleges irányban:

$$L_{A1} \quad c_0 \quad v_F \quad (9.143)$$

Behelyettesítve „ c_{1A1} ” értékét:

$$T = \frac{t_{A1} - L_{A1}v_F/(c_0^2 + v_F^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}}$$

$$Y = \frac{L_{A1} + v_F t_{A1}}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}}$$

$$\Theta = \omega_0 T - k_0 Y = k_0(c_0 T - Y)$$

$$\Theta_{2A1} = k_0 \frac{c_0 t_{A1} - L_{A1}v_F/c_0(1 + v_F^2/c_0^2) - L_{A1} - v_F t_{A1}}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}}$$

Az $\int \omega_0 t \equiv 0$ az indikáció (szemmel történő megfigyelés, fotólemez exponálás) következtében a teljes térbeli fázisforgatás nagysága:

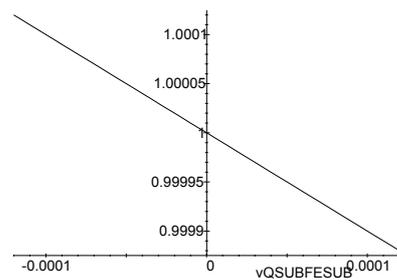
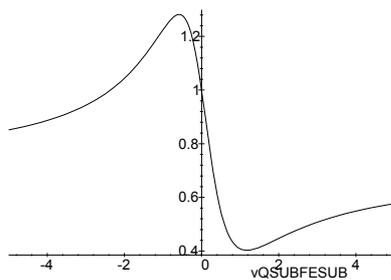
$$\Theta_{2A1} = -k_0 L_{A1} \frac{(1 - v_F/c_0(1 + v_F^2/c_0^2))}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}}$$

$$\Theta_{2A1} \equiv \Theta_{A2}$$

A v_F sebességre merőleges irányú Doppler effektus:

$$\omega_{2A1} = \omega_0 \frac{1/c_0 - v_F/(c_0^2 + v_F^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}}$$

$$\omega_{2A1} = \frac{1 - v_F/(1 + v_F^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(1 + v_F^2)}} \text{ nagy lépték } c_0 \equiv 1; \text{ mikro lépték } v_F = 10^{-4} c_0$$



Euklidesz Doppler effektus nagy lépték: L_{A1}

Euklidesz Doppler effektus μ lpték: L_{A1}

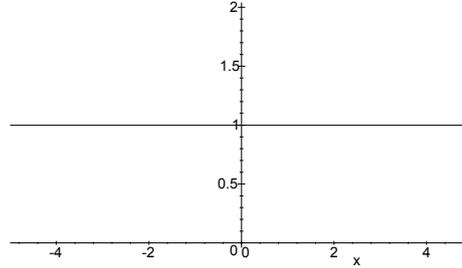
A v_F sebességre merőleges irányú térfrekvencia változás:

$$k_{2A1} = k_0 \frac{1 - c_0 v_F/(c_0^2 + v_F^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}} \quad (9.144)$$

A v_F sebességgel merőleges irányú fény csoportsebessége:

$$c_{2A1} = \frac{\omega_{2A1}}{k_{2A1}} = \frac{\omega_0(1/c_0 - v_F/(c_0^2 + v_F^2))}{k_0(1 - c_0 v_F/(c_0^2 + v_F^2))} = c_0 \frac{1/c_0 - v_F/(c_0^2 + v_F^2)}{1 - c_0 v_F/(c_0^2 + v_F^2)} \quad (9.145)$$

$$\boxed{c = \frac{1 - v_F/(1 + v_F^2)}{1 - v_F/(1 + v_F^2)}} \quad \text{ha} \quad c \equiv 1$$



Euklidesz-i fénysebesség nagyléptékben.

Az összes fázisváltozás az „A” karon:

$$\begin{aligned} \Theta_{2A1} &= -k_0 L_{A1} \frac{1 - v_F/c_0(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}} \\ \Theta_{2A} &= 2 * \Theta_{2A1} = -2k_0 L_{A1} \frac{1 - v_F/c_0(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}} \end{aligned} \quad (9.146)$$

Numerikusan:

$$\begin{aligned} \Theta_{2A} &= -2 * 1.33 * 10^6 * 20 \frac{(1 - 10^{-4}/(1 + 10^{-8}))}{\sqrt{1 + 10^{-8}/(1 + 10^{-8})}} \\ \Theta_{2A} &= -5.3195 \times 10^7 \end{aligned} \quad (9.147)$$

ÖSSZEGZÉS AZ ALAPHELYZET FÁZISVÁLTOZÁSRA:

Összegezve az „A” jelű tükörhöz tartozó út teljes fázisváltozását:

$$\begin{aligned} \Theta_{2A} &= \Theta_{2A1} + \Theta_{2A2} = k_0 L_{A1} \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} + k_0 L_{A2} \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \\ \text{Ha } L_{A1} &= L_{A2} = L \\ \Theta_{2A} &= 2k_0 L \frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \end{aligned} \quad (9.148)$$

Összegezve a „B” jelű tükörhöz kapcsolódó út fázisváltozását:

$$\begin{aligned} \Theta_{2B} &= \Theta_{2B1} + \Theta_{2B2} = -2k_0 L_{B1} \frac{1 - v_F/c_0(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}} \\ \text{Ha } L_{B1} &= L_{B2} = L \\ \Theta_{2B} &= -2k_0 L \frac{1 - v_F/c_0(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}} \end{aligned} \quad (9.149)$$

A két út közti fáziskülönbség:

$$\Delta\Theta_{2ALAP} = \Theta_{2A} - \Theta_{2B} = 2k_0L \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} - \frac{1 - v_F/c_0(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}} \right) \quad (9.150)$$

normálva $c_0 = 1$

$$\Delta\Theta_{2ALAP} = \Theta_{2A} - \Theta_{2B} = 2k_0L \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2}} + \frac{1 - v_F/c_0(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(1 + v_F^2)}} \right)$$

ÖSSZEGZÉS ELFORGATÁS HELYZET FÁZISVÁLTOZÁSÁRA:**Összegezve az „A” jelű tükörhöz kapcsolódó út fázis változásait:**

$$\begin{aligned} \Theta_{2A1} &= -k_0L_{A1} \frac{1 - v_F/c_0(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}} \\ \Theta_{2A} &= 2 * \Theta_{A1} = -2k_0L_{A1} \frac{(1 - c_0v_F/(c_0^2 + v_F^2))}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}} \end{aligned} \quad (9.151)$$

Összegezve a ”B” jelű tükörhöz kapcsolódó út fázisváltozását:

$$\Theta_{2B} = \Theta_{2B1} + \Theta_{2B2} = -k_0L_{B1} \frac{1 + v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} - k_0L_{B2} \frac{1 - v_F/c_0}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}}$$

$$ha L_{B1} = L_{B2} = L \quad (9.152)$$

$$\Theta_{2B} = -2k_0L \frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} \quad (9.153)$$

A két út közti fáziskülönbség:

$$\Delta\Theta_{2ELF} = \Theta_{2A} - \Theta_{2B} = -2k_0L \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} - \frac{1 - v_F/c_0(1 + v_F^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}} \right) \quad (9.154)$$

normálva $c_0 = 1$

$$\Delta\Theta_{2ELF} = \Theta_{2A} - \Theta_{2B} = 2k_0L \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2}} + \frac{(1 - v_F/(1 + v_F^2))}{\sqrt{1 + v_F^2/(1 + v_F^2)}} \right)$$

NUMERIKUSAN:**ELFORGATOTT HELYZET:**

A fenti $\Delta\Theta_{ELF}$ képlete alapján, ha $x=L_0 = 10$ m; $k_0 = 1.3 * 10^6$ és $v_F = 30$ km/s illetve $c_0 = 300000$ km/s értékre normalva $v_F = 0.0001$

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_{2ELF} &= \Theta_{2A} - \Theta_{2B} = 2 * 1.33 * 10^6 * \\ &* 20 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 10^{-8}}} + \frac{1 - 10^{-4}/(1 + 10^{-8})}{\sqrt{1 + 10^{-8}/(1 + 10^{-8})}} \right) \\ \Delta\Theta_{2ELF} &= 1.0639 \times 10^8\end{aligned}$$

ALAPHELYZET:

A fenti $\Delta\Theta_{ALAP}$ képlete alapján, ha $x=L_0 = 10$ m; $k_0 = 1.3 * 10^6$ és $v_F = 30$ km/s illetve $c_0 = 300000$ km/s értékre normalva $v_F = 0.0001$

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_{2ALAP} &= \Theta_{2A} - \Theta_{2B} = 20 * 1.33 * \\ &* 10^6 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 10^{-8}}} + \frac{1 - 10^{-4}(1 + 10^{-8})}{\sqrt{1 + 10^{-4}/(1 + (10^{-4})^2)}} \right) \\ \Delta\Theta_{2ALAP} &= 1.0639 \times 10^8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_{2ALAP} - \Delta\Theta_{2ELF} &= 2k_0L \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2}} + \frac{1 - v_F/(1 + v_F^2)}{\sqrt{1 + v_F^2/(1 + v_F^2)}} \right) - \\ &- 2k_0L \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2}} + \frac{(1 - c_0v_F/(1 + v_F^2))}{\sqrt{1 + v_F^2/(1 + v_F^2)}} \right) \\ \Delta\Theta_{2ALAP} - \Delta\Theta_{2ELF} &= 0\end{aligned}\tag{9.155}$$

A két út közti fáziskülönbség numerikusan:

$$\Delta\Theta_{2ALAP} = \Theta_{2A} - \Theta_{2B} = -2k_0L \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_F^2/c_0^2}} + \frac{(1 - c_0v_F/(c_0^2 + v_F^2))}{\sqrt{1 + v_F^2/(c_0^2 + v_F^2)}} \right)\tag{9.156}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_{2ALAP} &= \Theta_{2A} - \Theta_{2B} = 2 * 1.33 * 10^6 * 20 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 10^{-8}}} + \right. \\ &\left. + \frac{1 - 10^{-4}(1 + 10^{-8})}{\sqrt{1 + 10^{-4}/(1 + (10^{-4})^2)}} \right)\end{aligned}$$

$$\Delta\Theta_{2ALAP} = 1.0639 \times 10^8$$

$$\Delta 2ALAP - \Delta 2ELFOR = 1.0639 \times 10^8 - 1.0639 \times 10^8 = 0$$

Összefoglalva a háromféle geometria a MICHELSON - MORLEY kísérlet elméleti számított eredményeit, a következőkben foglalhatjuk össze:

1. A GALILEI féle geometria szerint a kísérlet során csíkelődés nem léphet fel.
2. A MINKOWSKI féle geometria szerint a csíkelődés nem léphet fel.
3. Az EUKLIDESZ geometria szerint a csíkelődés nem léphet fel.

Mindezek alapján kijelenthető, hogy a Michelson-Morley mérés alkalmatlan a feltételezett feladat végrehajtására, azaz a FÖLD sebességének megállapítására, erre csakis a sokkal később végrehajtott és eredményes SAGNAC mérés alkalmas. Másrészt az EINSTEIN-féle speciális relativitáselmélet helytelen. A vele kapcsolatos relativisztikus jelenségek magyarázatára nem alkalmas. Mindezt figyelembe véve, a Michelson-Morley kísérlet egyedüli helytálló magyarázata a nyaláb interferencia felfogás alapján, lehetséges. Bizonyítani oly módon lehet, hogy a merőleges visszaverő tükör, egy elemi sávját kitakarva, igazolható a visszaverődő elemi sugár helye, illetve az, hogy interferencia önmagával vagy másik elemi sugárral következik-e be. Ezen kísérlet fontos, és tényleges elvégzésének eredménye rendkívül jelentős lenne.

III. rész

Kiegészítés és alkalmazások

10. fejezet

Forgatási transzformációk

EGYSZERŰ SZÁRMAZTATÁSA

10.1. Bevezetés

A speciális relativitás elmélet alapvető formulája a *LORENTZ TRASZFORMÁCIÓ*. Ezt a transzformációt fizikai mérés alapján vezették be, nevezetesen szerepet kapott későbbiekben a MICHELSON-MORLEY kísérlet eredményének igazolásában. Ezen kísérlet várható eredményének elméleti levezetésére többféle változat is ismeretes, ez arra enged következtetni, hogy lennie kell a transzformációs formuláknak valamilyen közös alapja. Ezt az alapot a fizikában vagy a matematikában kell megtalálni, esetleg mindkettőben.

Einstein a közös alapot a fizika geometrizálásával igyekezett megteremteni bevezetve a *MINKOWSKI* geometriát, amelynek fogalmi rendszere és transzformációs formulái megfeleltek az elméleti-fizikai követelményeknek. Nyilvánvaló, hogy *Einstein* választása: a *hiperbólikus geometria* kiemelt szerepe, tudatos volt és azon alapult, hogy a fény (az elektromágneses hullám) különleges jelensége volt a korabeli fizikának.-

Az elektromágneses jelenségek különlegessége abban áll, hogy vizsgálódásaink céljára nem áll rendelkezésre más (gyorsabb vagy kisebb energiájú) jelenség, és így önmagával kell vizsgálni a jelenséget, ami más esetekben nem fordul elő. Ez a különlegesség, azután az elemi részek fizikájában újra megjelenik kisebb-nagyobb mértékben. Elvileg a kielégítő vizsgáló hatás az elektromágnesességnél sokkal gyengébb gravitáció lenne, ez azonban mindmáig nem realizálódott, feltehetőleg a sokkal kisebb detektálható energiák következtében, amelyeket a jelenlegi mérés technika észlelési szintje sok nagyságrenddel meghalad.

Nyilvánvalónak látszik, hogy a gravitációs energiaváltozások által generált elektromágneses folyamatok, mint a megfigyelések jelei, még a jövő lehetősége. (Itt érdekes lehetőségként jöhet számításba a *FARADAY*-kalitka, amely elektromágnesesen zárt rácsos szerkezet, míg gravitációsan nyitott ?)

Ismeretes, hogy *Einstein* a speciális-relativitás elméletének megalkotása során a *GALILEI GEOMETRÁ*-ról, transzformációról áttér a *MINKOWSKI* geometriára és transzformációra, nem vizsgálta módszeresen a különféle geometria rendszerek transzformációit és ennek a hiánynak tesztek most eleget.

10.2. Hiperkomplex számok

Geometriák. Transzformációk.

A hiperkomplex számrendszerekben 2, 4 és 8 dimenziós komplex számok állíthatók elő, amelyekből a képzetes egység négyzetének három lehetséges definíciójával háromféle komplex szám képezhető.

Kétdimenziós esetben:

1. Study féle számok: $i^2 = 0$
2. Komplex számok: $i^2 = -1$
3. Hiperbolikus komplex számok: $i^2 = 1$

(Az eltérő dimenziókban a számrendszer nem teljes, mivel az osztás nem definiálható. Így például a háromdimenziós vektorok sem alkotnak teljes rendszert.)

A fenti három számrendszer egyben egy-egy a geometriának is kölcsönösen megfeleltethető:

1. Study féle számok: ↔ Galilei geometria
2. Komplex számok ↔ Euklidesz geometria
3. Hiperbolikus komplex ↔ Minkowski geometria számok

A komplex számrendszerekben a kétdimenziósokat tekintve, mindhárom felírható exponenciális alakban:

$$\mathbf{S} = |\mathbf{S}| e^{i\varphi} \quad \text{ahol } |\mathbf{S}| \text{ „} \mathbf{S} \text{” abszolútértéke}$$

$$s \text{ „} \varphi \text{” a fázisszög}$$

Komplex szám exponenciális része sorbefejthető:

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} - \dots \quad (10.1)$$

Ismert, hogy ha két komplex számot összeszorozunk, úgy az abszolút értékek szorzata az eredő abszolút értéke, míg az exponenciális kitevőinek összege a forgatást jelenti:

$$|\mathbf{S}_e| = |\mathbf{S}_1| * |\mathbf{S}_2|$$

$$\varphi_e = \varphi_1 + \varphi_2$$

Ha feltételezzük, hogy \mathbf{S}_1 egységvektor, azaz $|\mathbf{S}_1| \equiv 1$, úgy az csupán elforgatja \mathbf{S}_2 - t, de abszolút értékét nem változtatja meg. Látni fogjuk ez a követelmény mindhárom számrendszerben, geometriában teljesül, annak ellenére, hogy az abszolútérték definíciója más-más. Ez nem más mint *Einstein* alapkövetelménye a *speciális relativitáselmélet* transzformációjával-geometriájával szemben.

Ezen követelménynek mindhárom geometriában-számrendszerben történő teljesülése, kvázi automatikusan történik a matematikai alapfeltevések következtében. Ezért az egyik geometria kiemelése és kizárólagos megfelleltetése a fizikai jelenségek egy csoportjának nem lehet automatikus, és külön vizsgálat tárgyát kell képezze a kiemelés jogossága.

Vagyis *Einstein követelménye*: az abszolútérték ($|ds|^2$) az ívelemnégyszet állandóságára vonatkozóan a transzformáció során nem felfedezés, csupán egy matematikai tény rögzítése.

A három számrendszerben az egységvektor sorfejtése következőképp alakul:

- Study féle számok:

$$\mathbf{i}^2 = 0$$

$$e^{\mathbf{i}\varphi} = 1 + \frac{\mathbf{i}\varphi}{1!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^4}{4!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^5}{5!} \dots\dots$$

$$e^{\mathbf{i}\varphi} = 1 + \mathbf{i}\varphi \tag{10.2}$$

ahol ha $\mathbf{S} = \text{Re}\mathbf{S} + \mathbf{i}\text{Im}\mathbf{S} = \mathbf{1}$

$$\varphi = \frac{\text{Im}\mathbf{S}}{\text{Re}\mathbf{S}} = \frac{\varphi}{1} \tag{10.3}$$

- Komplex számok:

$$\mathbf{i}^2 = -1$$

$$e^{\mathbf{i}\varphi} = 1 + \frac{\mathbf{i}\varphi}{1!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^4}{4!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^5}{5!} \dots\dots$$

$$e^{\mathbf{i}\varphi} = 1 + \frac{\mathbf{i}\varphi}{1!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^4}{4!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^5}{5!} \dots\dots$$

$$e^{\mathbf{i}\varphi} = \cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi \tag{10.4}$$

ahol ha $\mathbf{S} = \text{Re}\mathbf{S} + \mathbf{i}\text{Im}\mathbf{S} = \mathbf{1}$

$$\varphi = \arctan \frac{\text{Im} \mathbf{S}}{\text{Re} \mathbf{S}} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \tag{10.5}$$

- Hiperbolikus komplex számok:

$$\mathbf{i}^2 = 1$$

$$e^{\mathbf{i}\varphi} = 1 + \frac{\mathbf{i}\varphi}{1!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^4}{4!} + \frac{(\mathbf{i}\varphi)^5}{5!} \dots\dots$$

$$e^{\mathbf{i}\varphi} = 1 + \mathbf{i}\frac{\varphi}{1!} + \frac{(\varphi)^2}{2!} + \mathbf{i}\frac{(\varphi)^3}{3!} + \frac{(\varphi)^4}{4!} + \mathbf{i}\frac{(\varphi)^5}{5!} \dots\dots$$

$$e^{\mathbf{i}\varphi} = \cosh \varphi + \mathbf{i} \sinh \varphi \tag{10.6}$$

ahol ha $\mathbf{S} = \text{Re}\mathbf{S} + \mathbf{i}\text{Im}\mathbf{S} = \mathbf{1}$

$$\varphi = \text{ar tanh } \varphi = \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} \tag{10.7}$$

- A fenti levezetésekből kialakíthatók a forgató vektorok trigonometrikus alakjai.

Összefoglalva:

- Study számok forgató vektora: GALILEI-geometria

$$\boxed{\mathbf{s}_{eG} = e^{i\varphi} = 1 + i\varphi} \quad (10.8)$$

- Komplex számok forgató vektora: EUKLIDESZ-geometria

$$\boxed{\mathbf{s}_{eE} = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi} \quad (10.9)$$

- Hiperbolikus komplex számok forgató vektora: MINKOWSKI-geometria

$$\boxed{\mathbf{s}_{eM} = e^{i\varphi} = \cosh\varphi + i\sinh\varphi} \quad (10.10)$$

10.3. Forgató vektorok

A továbbiakban csupán „ φ ” értéket kell behelyettesíteni. Erre kétféle eljárást is lehet alkalmazni.

Általánosságban az $\boxed{\mathbf{s}_e = x + iy}$ forgató egységvektor felírható: mivel $|\mathbf{s}_e| \equiv 1$

- Szögfüggvények bevezetésével (illetve a megfelelő komplex-számrendszerbeli arkuszának képzésével):

$$\boxed{\text{Study számok: } \varphi = \frac{y}{x}}$$

$$\boxed{\text{Komplex számok: } \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\boxed{\text{Hiperkomplex számok: } \varphi = \operatorname{artanh}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

- A forgató egységvektor komponenseinek közvetlen algebrai felírásával

- Study számok:

$$\boxed{\varphi = \frac{y}{x}} \quad (10.11)$$

- Komplex számok:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \quad (10.12)$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \quad (10.13)$$

– Hiperbolikus komplex számok:

ha $x > y$

$$\boxed{\cosh\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}} \quad (10.14)$$

$$\boxed{\sinh\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}} \quad (10.15)$$

ha $y > x$

$$\boxed{\sinh\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}} \quad (10.16)$$

$$\boxed{\cosh\varphi = \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}}} \quad (10.17)$$

• A kétféle lehetőség közül az első felhasználásával a forgató vektorok:

– $\boxed{\text{Study számok: } s_{eG} = 1 + iy/x}$

– $\boxed{\text{Komplexszámok: } s_{eE} = \cos[\arctang(y/x)] + \sin[\arctang(y/x)]}$

– $\boxed{\text{Hiperbolikus komplex számok}}$

– $\boxed{\text{ha } x > y \quad s_{eM} = \cosh[\operatorname{artanh}(y/x)] + \sinh(\operatorname{artanh}(y/x))}$

– $\boxed{\text{ha } y > x \quad s_{eM} = \cosh[\operatorname{artanh}(x/y)] + \sinh[\operatorname{artanh}(x/y)]}$

• A fenti forgató egységvektorok alkalmazása nyilvánvalóan igazolja azt a következtetést, hogy a transzformáló vektorok forgatási képessége és alkalmazhatósága korlátozott. Az „ $\arctang(y/x)$ ” és „ $\operatorname{artanh}(y/x)$ ” az argumentum bármilyen nagy növekedése esetén nem használható, mivel, ha „ \arctang ” függvény $\pi/2$ -höz tart, míg „ $\operatorname{artanh} y/x$ ” függvény „ 1 ”-hez mindkét függvénynek szingularitása van. Pontosabban az $\operatorname{artanh}(y/x)$ csak $y/x < 1$ értékekre van definiószerűen értelmezve, a speciális relativitás elméletének keretében.

• Meg kell jegyezni, hogy az $y > x$ eset semmilyen formában nem került bele a téma irodalmába és nem létezőnek tekintik a fénysebesség határsebesség posztulátum következtében, pontosabban olyan tartománynak, ahol az oksági elv sérülése miatt a jelenségek értelmezése kizárt. Amennyiben bele is került, úgy a legkülönbözőbb transzformálandó paramétereknek, mint energia, impulzus tömeg stb. képzetes értéket tulajdonítanak, ami egy sor furcsaságot eredményez. Az akauzális viselkedés pedig eleve „gyanussá” teszi a dolgot.

- A fenti akauzális viselkedést viszonylag igen könnyen meg lehet szüntetni, csak az szükséges hozzá, hogy pontosítsuk, melyik mennyiség mit jelent. Választható, hogy Einsteinnel és a szokásokkal ellentétben valós mennyiségnek az időszerű míg képzetes mennyiségnek a térszerű mennyiségeket tekintjük, ebben az esetben fenti akauzalitás a koordináta tengelyek elforgatása következtében a változók komplex jelentésének felcserélődésében mutatkozik meg.
- Például a **tömeg-impulzus** változók felcserélődése **impulzus-tömeg** változó párossá, azzal a következménnyel jár, hogy a zérus sebességnek megfelelő végtelen sebességű test tömeg nélküli csak impulzussal rendelkező testté válik. Vagy a *töltés-áram vektor* a végtelen sebesség esetén *statikus mágneses töltéssé* alakul. Ehhez két megjegyzés kívánkozik:
- Az oksági elv sérülése az $y > x$ tartományban, abból következik, hogy a forgató vektor nem olyan abszolút értelmű, mint azt elsőre gondoljuk, ugyanis a vizsgálatot végző a **K1** laboratóriumi rendszerből vizsgálja a **V2** rendszert majd a **K2** rendszerben folytatja a vizsgálatot, és azt tapasztalja, hogy megfordult az oksági elv. Azonban ez csupán azt jelenti, hogy a **K1**-beli megfigyelő számára fordul meg az oksági elv, vagyis *az A és B jelű történések sorrendje B-A-ra módosultak*, azonban a *K1-V2 forgató vektorhoz tartozó szög $\text{ath}(y/x)$ míg, a V2-K1 forgatóvektorhoz tartozó szög $\text{ath}(x/y)$ ami „-1- hiperbolikus szögnek”* forgatásnak felel meg, azaz a vizsgáló mivel a valós paramétert nem az időtengelyen hanem a tértengelyen észleli az akauzális viselkedést, míg az időtengelyen, amely képzetes semmiféle mérést nem végez, *jól lehet az A itt továbbra is kisebb mint B tehát a hagyományos kauzalitás nem sérült.*
- Ami a *Galilei* és *Euklidesz*-i rendszert illeti a forgató vektorok nem változnak meg, ha „ $v > c$ ” reláció esetén, azonban szögfüggvények használata az euklideszi rendszerben a „*arctang*” függvény $\pi/2$ -re történő periódussága miatt problémákat okoz.

A forgató vektorok közvetlen algebrai kifejezéssel:

– Study-számok:

$$\boxed{\mathbf{s}_{eG} = 1 + \mathbf{i} \frac{y}{x}} \quad (10.18)$$

– Komplex számok:

$$\boxed{\mathbf{s}_{eE} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \mathbf{i} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \quad (10.19)$$

$$\boxed{\mathbf{s}_{eE} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2/x^2}} + \mathbf{i} \frac{y/x}{\sqrt{1 + y^2/x^2}}} \quad (10.20)$$

– Hiperbolikus komplex számok:

$$\mathbf{s}_{eM} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + \mathbf{i} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad (10.21)$$

$$\mathbf{s}_{eM} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2/x^2}} + \mathbf{i} \frac{y/x}{\sqrt{1 - y^2/x^2}} \quad (10.22)$$

10.4. Vektor transzformáció

Bevezetve az \mathbf{S}_0 komplex téridő vektort:

$$\mathbf{S}_0 = ct_0 + \mathbf{i}r_0 \quad (10.23)$$

– Study számok:

$$\mathbf{s}_{2G} = \mathbf{s}_{eG} \times \mathbf{S} = 1 + \mathbf{i}r \frac{v}{c} \quad (10.24)$$

– Komplex számok:

$$\mathbf{s}_{2E} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} + \mathbf{i} \frac{v/c}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} \quad (10.25)$$

– Hiperbolikus komplex számok:

* ha $ct > r$

$$\mathbf{s}_{2M} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \mathbf{i} \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.26)$$

* ha $r > ct$

$$\mathbf{s}_{2M} = \frac{c/v}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \quad (10.27)$$

A fenti forgató vektorokból az a következtetés vonható le, hogy a $v = c$ értéknél a hiperbolikus komplex számok különleges jelenséget szingularitást jeleznek, azonban ez a szingularitás nem jelent határt, mivel a téridő vektor ténylegesen tovább forgatható.

Ha a forgatott vektor:

$$\mathbf{S}_1 = cT + \mathbf{i}R \quad (10.28)$$

– akkor

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{s}_e \times \mathbf{S}_1 \quad (10.29)$$

– adja az elforgatott vektort.

– **Study számok:**

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{2G} &= cT + \mathbf{i}R + \mathbf{i}Tcv/c \\ \mathbf{S}_{2G} &= cT + \mathbf{i}(R + Tv) \end{aligned} \quad (10.30)$$

– **Komplex számok:**

$$\mathbf{S}_{2E} = c \frac{T - Rv/c^2}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} + \mathbf{i} \frac{Tv + R}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} \quad (10.31)$$

– **Hiperbolikus komplex számok:**

* ha $cT > R$

$$\mathbf{S}_{2M} = c \frac{T + Rv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \mathbf{i} \frac{Tv + R}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.32)$$

* ha $R > cT$

$$\mathbf{S}_{2M} = \frac{Tc^2/v + R}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} + \mathbf{i} \frac{Rc/v + cT}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \quad (10.33)$$

Néhány következtetés:

A kétféle módon kialakított transzformációs formula nem azonos végeredményhez vezet, mivel az első esetben az „arctang” és „artanh” függvények tulajdonságai korlátozzák a végeredményt.

Azonban a második típusú transzformációs formulák jelzik mind a komplex mind a hiperkomplex számok esetében, hogy a „ $v = c$ ” eset különleges. Ugyanis a transzformált vektor:

- komplex esetben: $\varphi = \pi/2$ fázisszöggel rendelkezik
- hiperbolikus komplex esetben: *szingularitása van.*

- Az, hogy a két esetben mi történik csak a teljes transzformált vektor vizsgálata döntheti el:
- Komplex esetben:

- Ha „ $\varphi = \pi/2$ ” ami azt jelenti, hogy a vektor tisztán képzetessé válik, azaz időszerű komponense nincs, csak térszerű komponense van. Energia - impulzus esetben nincs nyugalmi energiája csak impulzusa. Ilyen jelenségek: az elektromágneses hullám; feltételesen a neutrínó; a gravitációs hullám.
 - Azonban abban a pillanatban, amint a különleges helyzet a „ c ”-vel történő mozgás megszűnik, megszűnik a „tiszta impulzus” jellege és megjelenik a tömeg. Ilyen jelenségeket ismerünk: ciklotron sugárzás; annihiláció. (A ciklotron sugárzásban az elektronok egyenlőtlen mozgásából eredő lassítások és gyorsítások következtében a referencia fény hullámhosszhoz képest a térszerűség változik.)
- Hiperbolikus esetben:
 - Mind a valós, mind a képzetes rész végtelen nagyvá válik, ami azt jelenti a vektor nem mérhető, mert bármilyen mennyiség elvonása sem jellemző a mért értékre. Energia - impulzus esetben ez azt jelenti képtelenek vagyunk megvizsgálni a jelenséget amely „ $v=c$ ” sebességű. Mindez alapvetően azt jelenti, hogy olyan jelenségeket, amelyekben „ $v = c$ ” sebességű változások történnek nem áll módunkban elektromágneses uton megvizsgálni. Pontosabban az „időszerű” mérések nem végezhetőek el, csupán „társzerű” mérések végezhetőek. Más esetben energiaszerű mérések nem végezhetőek, hanem csak impulzusszerű mérések.

Igy tehát alapvető fontosságú annak feltárása, hogy a transzformációk során mi is az amit megmaradó mennyiségnek tartunk:

Az einsteini követelmény az ugynevezett (és általa meghonosított kifejezést) az *IVELEMNÉGYZET* transzformáció-független voltát definiálta és ez vált a speciális relativitás elméletének alapjává.

Ennek fizikai alapját az a követelmény adta, hogy egy jelenség attól, hogy más nem gyorsuló koordináta rendszerben írjuk le nem változhat meg, és a meg nem változó mennyiségnek a komplex téridő típusú vektorok abszolút értékét választották. Ami komplex esetben összeg típusú mennyiség $|\mathbf{s}| = (x^2 + y^2)$; míg hiperbolikus komplex esetben különbség típusú mennyiség: $|\mathbf{s}| = (x^2 - y^2)^{0.5}$

A fenti tétel jogosságát azonban semmi nem indokolta, de az ívelemnégyszet típusú mennyiségek valóban megmaradónak bizonyultak a gyakorlatban. Azonban az ívelemnégyszet megfeleltetése az abszolútértéknek, már önkényes választás, mivel egy transzformált komplex vektor reális részének mérése és a vektor komponensei négyzetösszegének egymással való önkényes megfeleltetése kényszerítette ki. Ezen önkényes választás hozta magával a *Minkowski* geometriát és a *HIPRERBOLIKUS KOMPLEX* számokat, amely a támasztott önkényes követelményeket kielégítette.

Ugyanis ívelemnégyszet típusú mennyiség más geometriában-számrendszerben is megjelenik és az abszolút érték transzformáció-függetlensége ugyancsak fennáll. Ismeretes a mozgásokat leíró differenciál egyenletek megoldása során, már korábban megjelentek a komplex kifejezések és a konkrét, fizikailag is mérhető jelenségként a valós részt választották, abból a megállapodásból következően, hogy két jelenség akkor tekinthető azonosnak, ha a méréssel szerzett energia adatok megegyeztek. Ez már a komplex szám definíciójából is következik.

- A valós rész a mérési gyakorlat szerint, megegyezett-arányos volt a mérés során indikálható teljesítményt nyújtó jellel, ami alapfeltétele volt két jelenség azonosságának.
- A képzetes rész, amely reflektálódott a mérési helyről vagy más a mérés által nem indikálható, esetleg zavaró jelenségeként volt tapasztalható, a korabeli 19. századi fizikában nem mért mennyiség volt.
- Azonban nagy nehézségeket okozott, hogy a mérés technikában megszokott négyzetérték, vektorok mérésekor a négyzetvektor abszolútértékének formájában nem bizonyult megmaradónak, ezért a speciális relativitás elméletéhez olyan geometriát-számrendszert választottak, melyben a megmaradó mennyiség egyben a négyzet-vektor abszolútértéke is volt. Ezzel állt helyre a valós és a vektor-mennyiségek négyzetes mérésének kontinuitása.
- A fenti választás azonban olyan következményekkel járt, melyek nem feltétlenül kívánatosak. A transzformáció meghatározott értékénél szingularitás jelent meg, amely a jelenségeket mintegy kettéválasztotta: szingularitás alatti és fölötti; reális és nem reális; kauzális és akauzális jelenségek csoportjára.
- Ez a megkülönböztetés pedig oda vezetett, hogy a szingularitás feletti jelenségek vizsgálata mondhatni tudománytalan vagy legalábbis csupán megtúrt, de mindenképpen periférikus, elhanyagolt tevékenységgé vált. S mivel a szingularitás helyén fellépő végtelen mennyiségek mérhetetlenek, matematikai kezelésük nem megoldott, a gyakorlati ellenőrzésnek elméleti alapja nincs, ezért a jelenségek ezen köre: nem kívánatos a tudományos tevékenység során konzisztens elméleteket igénylő, tudományos-kritikai szemléletben.

Ezek a problémák nem szükségszerűek és létük nem is feltétlenül indokolt, mivel kiindulásuk egy téves állítás, nevezetesen:

A Galilei-transzformáció-t tévesen az Euklidesz -i geometria transzformációjának tekintették. Ez azzal a következménnyel járt, hogy a Galilei tér - Study számok körében érvényes vektor abszolútértékét: az „időkomponenst”, amely valóban változatlan a transzformáció során, fizikai mérésekkel történő konfliktusai miatt el kellett vetni. Helyette azonban az említett téves felfogás miatt nem az Euklidesz-i teret és a komplex számrendszert választották. De a komplex négyzetvektor valós része éppen a nevezetes ívelemnégyzettel azonos és ennek következtében a komplex mennyiségekre vonatkozó mérési tapasztalat megegyezett volna azzal a követelménnyel, hogy egy jelenség akkor azonos önmagával, ha az eltérő koordináta-rendszerekben mérhető egyazon paraméter nem változik meg. Természetesen, ebben az esetben is létrejöhet végtelen paraméter, ha a követelményt túlságosan mereven kezeljük: például a jobbra forgatott koordinátarendszert addig forgatjuk míg a vektor és a tértengely egybeesik, és egyidejűleg megköveteljük az időtengelyen mérhető mennyiség állandóságát, akkor a vektor abszolút értéke végtelenné válhat.

Éppen ezért újra kell fogalmazni a kérdést mikor tekintünk egy jelenség-vektort azonosnak, ha eltérő koordináta-rendszerben végezzük a méréseket ?

Erre a kísérleti fizika mérési technikája adja meg a választ:

A mérések során ugyanis mindig energiát kell kicsatolni a jelenségből és valamilyen nemlineáris elem segítségével át kell alakítani úgy, hogy annak spektrumában zérus frekvenciájú komponens is megjelenjen, ezt a zérus frekvenciájú jelet tekintik arányosnak a jelenséggel. Természetesen a fenti átalakítást többnyire megelőzi a jelenség elektromos vagy elektromágneses jelle történő arányos átalakítása, akár közvetlen akár közvetett módon, ezen átalakításokkal kapcsolatban az egyetlen követelmény, hogy az eredeti jelenséggel megbízható arányossága fennálljon.

A kísérleti fizika követelménye a mért jelenség-vektor nemlineáris átalakításakor, valójában a karakterisztika négyzetes komponensére támaszkodik, mivel az a vektor négyzetének képzésével zérus frekvenciájú jelet is létrehoz a valós részben, ami a teljesítménnyel arányos és mivel mindig teljesítményt kell kicsatolni a jelenségből a méréshez ez a korrekt eljárás. Ha nincs teljesítmény kicsatolás nincs mérés sem. Ezért rendkívül fontos kérdés, hogy a jelenség koordináta rendszeréből, milyen transzformációval lehet a mérési koordináta rendszerbe átvinni a kicsatolt teljesítményt.

A fenti mérési problematikája korántsem véletlenül a fényvel végzett mérések során vált lényegessé. A fénytani mérések során fényességet, fényerőt, fénytelsítményt tudtak csak mérni, az interferenciamérések, a térben és időben koherens stabil és kellően hosszú sugárnyalábok hiányában csupán frekvenciamérésre voltak alkalmasak (nem volt véletlen, hogy sokáig a hullámhossz volt fényhullámok jellemző megadási módja) fázismérésre már nem, ezért a fázisinformációk hiányoztak a mérési eredmények közül. Ennek következtében a fenti mérési metodika azon a hallgatólagos megállapodáson nyugszik, hogy a jelenségeket, amelyek komplex leírással lehet jellemezni, mindig a valós résszel, vagy az abszolútértékkel adjuk meg, ez azonban a teljes információ 50%-ának elvesztését, vagy figyelmen kívül hagyását jelenti, ami lehet a fázisszög vagy a képzetes rész. A kísérleti fizikában, a fázisszög figyelmen kívül hagyása valójában annak a következménye, hogy mérése igen nehéz, ezért elméletileg az abszolút érték négyzetének mérése vált elfogadottá, a fényvel kapcsolatos méréseknél. Ezek Minkowski-térben történő transzformációja megegyezik a négyzetvektor valós részének transzformációjával ez a döntő oka az „ívelemnégyzet” megmaradását szorgalmazó speciális relativitáselmélet sikerének.

Különösen igaz ez a kvantummechanikai felfogásban, ahol a részecskék számának ismerete jelenti az abszolút értéket, míg fázisuk nem mérhető. A mérésekben bekövetkező információvesztés azonban, nagy nehézségeket okozott, ezért a fázisinformáció, helyett a valószínűségi hullámfelfogás és leírás került bevezetésre, ahol a valós és a képzetes rész viszonya pótolta a hiányzó információt, azonban a két vektorábrázolást nem lehet ugyanazon transzformációs formulával az értékelés koordináta-rendszerbe transzformálni, ezért a két leírás csak külön-külön energiakicsatolás segítségével tehető mérhetővé, vagyis egyszerre nem mérhető, azaz a részecske és hullám reprezentáció csak külön-külön létezik. Ily módon ugyan a kvantummechanika „teljes” rendszert alkot, de a jelenségvektort csak részeiben tudja mérni. A kérdés csupán az, hogy a két vektorinformáció milyen pontossággal alkalmazható ugyanarra az objektumra.

További problémák:

- A számszerű azonos mérési eredmény valóban garancia-e a jelenség vek-

tor azonos voltára, mikor több komponens eredőjeként jön létre a mérési eredmény? A szuperpozíció elve alapján azt kellene hinni, hogy nem lehet hibás az eredmény, de az összetevők fázisszinkronizáltsága felboríthatja az energiamegmaradás elvét és mérési hibát okoz.

- Nyilvánvalóan a kérdés azzal függ szorosan össze a mérési módszer megnyíban hamisítja meg a mérés végeredményét, ha a mérés során kicsatolt teljesítmény összevethető a mért jelenség teljesítményével ?
- Elegendő-e egy jelenség-vektornak önmagával való azonosságához, ha abszolút értéke állandó ? A fázisszög változása mikor hanyagolható el ? Erre a válasz nyilvánvaló a fázisszinkronizált-koherens hullámjelenségek esetén a mérés hamissá válhat, míg a kevert fázisú jelek esetén az abszolút érték egyedüli mérése nem kifogásolható.
- És végül elegendő-e egy vektort önmagában vizsgálni, nem szükségszerű-e két vektor -egy jelenségvektor és egy referenciavektor ahhoz - abszolútértékének és bezárt szögének azonossága ha egy jelenséget akarunk önmagával azonosnak minősíteni ? Ez azért lényeges, vizsgálata esetén a kapott autókorrelációs függvény: a mérés eredménye, ez viszont nem szolgáltat fázisinformációt, azaz az önazonosság korlátozott érvényű.

11. fejezet

Skalárok és vektorok

Négydimenziós vektorműveletek

Amint azt már részletesen ismertettem a *GALILEI*, *EUKLIDESZ* és *MINKOWSKI* geometriákhoz egymáshoz nagyon hasonló, de eltérő következményekkel járó transzformációk tartoznak, amelyek a komplex síkon egyaránt forgatásként — a fizikában mozgásként — értelmezhetők. Ezek a forgatási transzformációk a két eltérő sebességű inerciarendszer közti kapcsolatot írják le.

Ismeretes: *MAXWELL* egyenletek eltérő sebességű koordináta rendszerekkel szembeni invarianciájának követelménye végül is a *LORENTZ-transzformáció* bevezetéséhez és a *MINKOWSKI* féle hiperbólikus geometriához vezetett. Az alábbiakban azt kívánom feltárni, hogy a *hiperbólikus geometria bevezetése* és ezzel együtt a *speciális relativitás elmélete* nem fizikai tények és kísérletek következménye, hanem a korábban kialakult matematikai apparátusé. Továbbá tény, hogy egyenrangú más apparátus is létezik és az is alkalmazható.

Összefoglalva mindez azt jelenti, hogy a **LORENTZ invariancia nem természeti törvény**, hanem a vektoralgebra axiomatikus megalapozásakor axiómaként rögzített skalár szorzat fogalmából következik. Ez ugyanis azt definiálta, hogy a képzetes egységvektor négyzete:

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1 \quad (11.1)$$

Ha ez a skalár szorzat:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (11.2)$$

a *LORENTZ invariancia elvész* és helyébe az *EUKLIDESZ invariancia lép*.

Ha:

$$i^2 = j^2 = k^2 = 0 \quad (11.3)$$

GALILEI invarianciáról beszélhetünk.

A *MAXWELL egyenletek invarianciája* célszerűen a négydimenziós tér - idő rendszer keretében tárgyalható. Ehhez a három geometria és a hozzá kapcsolódó hiperkomplex számok egyértelműen felhasználhatók, azonban a teljes tárgyalás során ragaszkodni kell, az adott számrendszer következetes alkalmazásához, ez a multban nem így történt és ezért a jelenségeket összekevert számrendszerekben tárgyalták.

Ismertnek tekintve a komplex vektoralgebra összeadás, kivonás és valóssal való szorzás szabályait először a négydimenziós vektorok szorzását célszerű definiálni:

$$\mathbf{V}_1 = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k} \quad (11.4)$$

$$\mathbf{V}_1 = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k} \quad (11.5)$$

A szorzást elvégezve és rendezve:

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = \begin{aligned} & (a_1a_2 + b_1b_2\mathbf{i}^2 + c_1c_2\mathbf{j}^2 + d_1d_2\mathbf{k}^2) + \\ & + (a_1b_2\mathbf{i} + b_1a_2\mathbf{i} + c_1d_2\mathbf{jk} + d_1c_2\mathbf{kj}) + \\ & + (a_1c_2\mathbf{j} + c_1a_2\mathbf{j} + d_1b_2\mathbf{ki} + b_1d_2\mathbf{ik}) + \\ & + (a_1d_2\mathbf{k} + d_1a_2\mathbf{k} + b_1c_2\mathbf{ij} + c_1b_2\mathbf{ji}) \end{aligned}$$

Ezekből a teljes szorzatokból előállítható a három geometria mindegyikére, az érvényes szorzási szabály figyelembe véve a képzetes egységre vonatkozó szabályt:

GALILEI - Study számok:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= 0 & \mathbf{j}^2 &= 0 & \mathbf{k}^2 &= 0 \\ \mathbf{ij} &= \mathbf{k} & \mathbf{ji} &= -\mathbf{k} \\ \mathbf{jk} &= \mathbf{i} & \mathbf{kj} &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{ki} &= \mathbf{j} & \mathbf{ik} &= -\mathbf{j} \end{aligned}$$

EUKLIDESZ - komplex számok:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= -1 & \mathbf{j}^2 &= -1 & \mathbf{k}^2 &= -1 \\ \mathbf{ij} &= \mathbf{k} & \mathbf{ji} &= -\mathbf{k} \\ \mathbf{jk} &= \mathbf{i} & \mathbf{kj} &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{ki} &= \mathbf{j} & \mathbf{ik} &= -\mathbf{j} \end{aligned}$$

MINKOWSKI - hiperbolikus komplex számok:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= 1 & \mathbf{j}^2 &= 1 & \mathbf{k}^2 &= 1 \\ \mathbf{ij} &= \mathbf{k} & \mathbf{ji} &= -\mathbf{k} \\ \mathbf{jk} &= \mathbf{i} & \mathbf{kj} &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{ki} &= \mathbf{j} & \mathbf{ik} &= -\mathbf{j} \end{aligned}$$

(A szorzótáblákból jól látszik, hogy a négydimenziós szorzás nem kommutatív.)

11.1. Vektorműveletek az egyes geometriákban

11.1.1. TELJES VEKTOROK SZORZATAI

A képzetes egységekre vonatkozó szabályok figyelembevételével a $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ szorzatok a következőképp alakulnak:

GALILEI-STUDY számok:

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = \begin{aligned} & a_1a_2 + \\ & + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\mathbf{i}_G + \\ & + (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)\mathbf{j}_G + \\ & + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{k}_G \end{aligned}$$

EUKLIDESZ-komplex számok:

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = \begin{aligned} & (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + \\ & + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\mathbf{i}_E + \\ & + (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)\mathbf{j}_E + \\ & + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{k}_E \end{aligned}$$

MINKOWSKI-hiperbólikus komplex számok:

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = \begin{aligned} & (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \\ & + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\mathbf{i}_M + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)\mathbf{j}_M + \\ &+ (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{k}_M \end{aligned}$$

11.1.2. NEMTELJES VEKTOROK SZORZATAI

KÉPZETES VEKTOROK

További fontos következtetés vonható le, ha feltételezzük, hogy a \mathbf{V}_{1v} és \mathbf{V}_{2v} képzetes azaz *hagyományos vektor*:

$$a_1 = a_2 = 0 \tag{11.6}$$

GALILEI-STUDY számok:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{1v} \times \mathbf{V}_{2v} = &+ (c_1d_2 - d_1c_2)\mathbf{i}_G + \\ &+ (d_1b_2 - b_1d_2)\mathbf{j}_G + \\ &+ (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{k}_G \end{aligned}$$

EUKLIDESZ-komplex számok:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = &(-b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + \\ &+ (c_1d_2 - d_1c_2)\mathbf{i}_E + \\ &+ (d_1b_2 - b_1d_2)\mathbf{j}_E + \\ &+ (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{k}_E \end{aligned}$$

MINKOWSKI-hiperbolikus komplex számok:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = &(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \\ &+ (c_1d_2 - d_1c_2)\mathbf{i}_M + \\ &+ (d_1b_2 - b_1d_2)\mathbf{j}_M + \\ &+ (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{k}_M \end{aligned}$$

Mindezt leírhatjuk a hagyományos vektor algebrában bevezetett skaláris és vektorális szorzat fogalmával is:

GALILEI-STUDY számok:

$$\mathbf{V}_{1v} \times \mathbf{V}_{2v} = \text{két vektor vektoriális szorzata} \tag{11.7}$$

Ilyen például a szabad térben terjedő elektromágneses síkhullám teljesítménye:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{S} \text{ ahol} \tag{11.8}$$

$$\mathbf{S} = \text{Poynting-vektor} \tag{11.9}$$

EUKLIDESZ-komplex számok:

$$\mathbf{V}_{1v} \times \mathbf{V}_{2v} = \tag{11.10}$$

$$= \text{két vektor negatív skalár szorzata} + \tag{11.11}$$

$$+ \text{két vektor vektoriális szorzata} \tag{11.12}$$

Az elektromágneses síkhullám teljesítménye, ahol:

$$\mathbf{E} * \mathbf{H} = -|\mathbf{E}||\mathbf{H}| + \mathbf{S} \quad (11.13)$$

-|\mathbf{E}||\mathbf{H}| az azonos fázisú komponensekből adódó,
"helyben maradó" teljesítmény azaz a veszteség

$$\mathbf{S} = \text{tovaterjedő teljesítmény, impulzusteljesítmény} \quad (11.14)$$

MINKOWSKI-hiperbolikus komplex számok:

$\mathbf{V}_{1v} \times \mathbf{V}_{2v} = \text{két vektor skalár szorzata} + \text{két vektor vektorális szorzata}$

Fogalmak és értelmezésük:

Skalár szorzat: a zérus fáziskülönbségű vektorkomponensek szorzata.

Vektorális szorzat: $\pi/2$ fáziskülönbségű vektorkomponensek szorzata.

Skalár szorzat: valós teljesítmény, nem vektor

Vektorális szorzat: képzetes teljesítmény - impulzusmomentum; pszeudóvektor.

Például:

Skalár szorzat: skalár potenciál

Vektorális szorzat: vektor potenciál.

Következtetések:

- A Galilei geometria nem engedi meg a valós és képzetes részek egymásba történő átalakulását.
- Mivel az \mathbf{E} és \mathbf{H} vektorok tetszőlegesen felbonthatók, és a merőleges komponensek nem zérusok, a térben nem tudnak tárolódni, ezért a szabad térben \mathbf{E} és \mathbf{H} mindig merőleges.
- A fenti összefüggésből adódó alapvető következtetés: a négydimenziós téridőben a *GALILEI* rendszerben nem definiált a skaláris szorzat, az *EUKLIDESZ* rendszerben a vektorok skaláris szorzata negatív, míg *MINKOWSKI* esetében a skaláris szorzat pozitív (ami megegyezik az általánosan használt vektor algebrában megszokottal és elfogadottal.)
- Ennek a fizikában különös jelentősége van, mivel hagyományos módon a skaláris szorzattal a vektorok azonos fázisú szorzata képezhető, amit a valós teljesítménynek feleltetnek meg. Ez pedig azt jelenti, hogy a *GALILEI* *transzformáció* alkalmazása esetén a szokásos skaláris szorzattal nem képezhető a teljesítménnyel arányos abszolút érték, ami pedig az elektrodinamika szokásos eljárása. Másképpen *GALILEI* geometriája szerinti tiszta vektorokból nem csatolható ki valós teljesítmény azaz észlelhetetlenek.

- További lényeges következmény akkor tudatosodik, ha a két vektort \mathbf{E} és \mathbf{H} -val azonosítjuk. Ekkor ugyanis a *GALILEI* térben csak a Poynting vektor jön létre. Az *EUKLIDESZ* térben a negatív skalár szorzat az elektromágneses tér veszteségi energiája (Helyben-maradó komponens), míg a vektorális szorzat a tovaterjedő impulzus. Az elektromágneses hullám veszteségi teljesítménye amely ha \mathbf{E} és \mathbf{H} ortogonális zérus, vagyis a veszteséges hullám esetén \mathbf{E} és \mathbf{H} nem lehetnek ortogonálisak, azaz nem független vektorok.
- Mindez a *MINKOWSKI* térben úgy értékelhető, hogy a pozitív skalár szorzat a külső megfigyelő által észlelt teljesítmény, ami eltérő szemléletre utal.

Nagyon fontos következménye, hogy a *MAXWELL* egyenletek vektor-analízisbeli leírása az eredeti megfogalmazásban a deklarált szándéktól eltérően, nem az *EUKLIDESZ* geometriában történt, hanem a *MINKOWSKI* geometriában. Ezért vált szükségessé a *LORENTZ invariancia bevezetése*, amely akkor igaz, ha a képzetes egységek négyzete: azonosan $\boxed{+1}$

11.1.3. VEKTOROK ABSZOLUT ÉRTÉKE

További fontos fogalom egy vektor abszolút értéke, amely definíciószerűen:

$$\boxed{\mathbf{V}*\bar{\mathbf{V}}} = |\mathbf{V}|^2 \quad \text{ahol:}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \\ \bar{\mathbf{V}} &= a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (11.15)$$

Egy fontos vektortípus a téridő vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \bar{\mathbf{S}} &= t - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k} \end{aligned}$$

Fontossága abból következik, hogy *Einstein* a relativitás-elméletet arra alapozza, hogy a vektor jellemző mennyiségei közül az abszolút értéke változatlan marad és mérhető.

GALILEI-STUDY számok: vektorok abszolút értéke

$$|\mathbf{V}| = \mathbf{V}*\bar{\mathbf{V}} = a \quad (11.16)$$

Téridő vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{S}| = \mathbf{S}*\bar{\mathbf{S}} = t$$

EUKLIDESZ-komplex számok:

$$|\mathbf{V}| = \mathbf{V}*\bar{\mathbf{V}} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{1/2} \quad (11.17)$$

ez sosem zérus, tehát mindig mérhető.

Téridő vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{S}| = \mathbf{S}*\bar{\mathbf{S}} = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

MINKOWSKI-hiperbolikus komplex számok:

$$|\mathbf{V}| = \mathbf{V} * \overline{\mathbf{V}} = (a^2 - b^2 - c^2 - d^2)^{1/2} \quad (11.18)$$

ez lehet zérus, ezért ha nincs is indikáció, az egyben nem jelenti a jelenség hiányát.

Téridő vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{S}| = \mathbf{S} * \overline{\mathbf{S}} = (t^2 - x^2 - y^2 - z^2)^{1/2}$$

ez mindig zérus ha fényre vonatkoztatjuk, értéke lehet pozitív definit, zérus vagy negatív definit. *Az Einsteini-féle, speciális relativitás elméletben mindig negatív definit kivéve a fényt ahol mindig zérus.*

11.1.4. VEKTOROK NÉGYZETE

Ugyancsak fontos fogalom, amely a téridő rendszerben sokat használnak a vektor négyzete: (Ez képezhető teljes vagy tiszta képzetes vektorból.)

GALILEI-STUDY számok négyzetvektora :

$$\mathbf{V} * \mathbf{V} = \mathbf{V}^2 = a^2 + 2abi + 2acj + 2adk \quad (11.19)$$

Téridő vektor:

$$\mathbf{S} * \mathbf{S} = \mathbf{S}_G^2 = t^2 + 2txi + 2tyj + 2tzk$$

EUKLIDESZ-komplex számok: négyzetvektora

$$\mathbf{V} * \mathbf{V} = \mathbf{V}^2 = [a^2 - (b^2 + c^2 + d^2)] + 2abi + 2acj + 2adk \quad (11.20)$$

Téridő vektor:

$$\mathbf{S} * \mathbf{S} = \mathbf{S}_E^2 = [t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] + 2t(xi + yj + zk)$$

MINKOWSKI-hiperbólikus komplex számok:

$$\mathbf{V} * \mathbf{V} = \mathbf{V}^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2abi + 2acj + 2adk \quad (11.21)$$

Téridő vektor:

$$\mathbf{S} * \mathbf{S} = \mathbf{S}_M^2 = [t^2 + x^2 + y^2 + z^2] + 2t(xi + yj + zk)$$

Fontos tény, hogy : $\boxed{\text{IVELEMNÉGYZET} = \text{Re}|\mathbf{S}_M|^2 = \text{Re} \mathbf{S}_E^2}$

A fenti két fogalom tisztán képzetes vektor esetében (ami megfelel a szokásos vektorfogalomnak):

GALILEI-STUDY számok:

$$|\mathbf{V}_G|^2 = 0 \quad (11.22)$$

$$\mathbf{V}^2 = 0 \quad (11.23)$$

EUKLIDESZ-komplex számok:

$$|\mathbf{V}_E|^2 = b^2 + c^2 + d^2 \quad (11.24)$$

$$\mathbf{V}_E^2 = -b^2 - c^2 - d^2 \quad (11.25)$$

MINKOWSKI-hiperbolikus komplex számok:

$$|\mathbf{V}_M|^2 = -b^2 - c^2 - d^2 \quad (11.26)$$

$$\mathbf{V}_M^2 = b^2 + c^2 + d^2 \quad (11.27)$$

- Mint az a fentiekben látható *EUKLIDESZ* és *MINKOWSKI* geometriák formulái könnyen összekeverhetők. Ismeretes *Einstein* az ugynevezett ívelemnégyszet fogalommal operál, ami azzal a kellemetlen lehetőséggel társul tiszta képzetes vektorok esetén (pl. az elektromágneses tér \mathbf{E} és \mathbf{H} vektora), hogy **a vektor abszolút értékének valós része EUKLIDESZ-ben definiálva és a vektor négyzetének valós része MINKOWSKI-ban definiálva azonos.** Ez zavaró mert a vektor négyzetének valós része a kicsatolt teljesítménnyel arányos, míg abszolút értéke az amplitudóra ad értéket ezek pedig csak tiszta harmonikus függvények esetén arányosak lineárisan a teljesítménnyel.
- Az ívelemnégyszetet másképpen hiperbolikus komplex vektor abszolút értékének foghatjuk fel. Az abszolút érték abban az esetben amikor tiszta szinuszos lefolyású jelenségeket vizsgálunk valóban arányos a jel teljesítményével. Azonban nem szabad azt elfelejteni, hogy a teljesítmény megjelenése mindig nemlineáris folyamat eredménye, aminek legtisztább esete a négyzetes folyamat. Mindez azzal jár, hogy minden mérés során érzékelt teljesítmény a négydimenziós vektor négyzetének valós részeként áll elő.
- Ez annál is inkább okoz könnyen zavart, mivel *Einstein* a **képzetes egységre $i = \sqrt{-1}$ EUKLIDESZ definíciót használja és ugyanakkor a négydimenziós vektor ívelemnégyszetét MINKOWSKI szerint írja fel**, ami egy elméleten belül nem korrekt. **A távolságként értelmezett négydimenziós ívelemnégyszetet azonosítja a négydimenziós *Minkowski* vektor abszolútértékének négyzetével.** Ez feltehetőleg onnan ered, hogy három dimenzióban az EUKLIDESZ abszolút érték négyzete azonos a MINKOWSKI-i vektornégyszet értékével.
- Mindez nagyon lényeges, mivel a négydimenziós térben a térszerű komponens mindig képzetes, ezért a térszerű távolság-négyzet csak *EUKLIDESZ* szerint pozitív míg *MINKOWSKI* szerint negatív. **GALILEI-ben a térszerű távolság azonosan zérus, ez a matematikai alapja a nevezetes Newton-i egyidejű távolhatásnak.**
- Vagyis *Einstein* a háromdimenziós értelmezést hibásan terjesztette ki a négydimenziós komplex térre. (Ezt a zavart tovább fokozza, hogy a vektoralgebrában szokásos módon a képzetes egységet *MINKOWSKI* szerint definiálják (s ugyanakkor *EUKLIDESZ*-inek tekintik.)

Az eddigiekből lényeges és alapvető következtetések vonhatók le:

1. A szokásos háromdimenziós vektortérben a vektor abszolútértékének négyzete és a vektor teljesítménye a skalár szorzat definíció következtében megegyezik.
2. A négydimenziós vektorterekben a két fogalom eltérő módon számítandó és értéke is eltérő, még abban az esetben is, ha a négydimenziós vektor tiszta képzetes azaz háromdimenziós vektor csak térkomponenseket tartalmazó vektor.

3. A tisztánlátás érdekében definiálni kell, hogy mit is értünk valós-észlelhető (mérhető) teljesítményen:

- a.) Két vektor szorzatának valós részét: a **mérés vektora** \times **megfigyelt vektorral**
- b.) **Egy vektor négyzetének valós részét: a mérés vektora négyzetes karakterisztikájú indikátoron.**
- A fenti két megfogalmazás azt jelenti, hogy minden mérés, megfigyelés csak olyan jelenségek észlelését teszi lehetővé, amelyek a mérés, megfigyelés részére energiát adnak le. Ez a leadott energia csak nemlineáris (legegyszerűbb esetben négyzetes) karakterisztikával rendelkező folyamat során jön létre. A folyamatból kicsatolható energia maximuma a négyzetes karakterisztikán előálló szorzat vektor (négyzetvektor) valós részével egyenlő.
- Magasabb rendű nemlineáritások is létrehozhatnak kicsatolható energiát, ami legegyszerűbben a nemlineáris karakterisztika sorbafejtésével számítható ki.

Összefoglalva a négydimenziós vektor által képviselt jelenségek energia vektorai valós és képzetes részre bonthatók, amelyek a klasszikus fizika energia és impulzus fogalmával rokoníthatók. Külön meg kell vizsgálni, hogy a forgatások abszolút érték invariáns tulajdonsága igaz-e a teljesítményelvre is, ezt a kétdimenziós esetben igen egyszerű tárgyalni.

Legyen a kiinduló koordinátarendszerben K_0 -ban, amely a mozgó tömeggel együtt mozgó rendszer, ekkor a nyugalomban lévő test energiája $\mathbf{E}_0 = E_0/c$ impulzus reprezentációban. A hozzá képest v_1 sebességgel haladó Földön lévő laboratóriumban K_1 -ben, $\mathbf{E}_1 = E_1/c + \mathbf{i}p_1$. A laboratóriumi K_1 -hez viszonyítva v_2 sebességgel mozgó K_2 rendszerben pedig $\mathbf{E}_2 = E_2/c + \mathbf{i}p_2$.

A transzformált energia formulák pedig a következők:

GALILEI-STUDY számok:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{1G} &= \mathbf{s}_{tG1} \times \mathbf{E}_0 \\
 \mathbf{E}_{1G} &= (1 + \mathbf{i}v_1/c_0) \times E_0/c_0 \\
 \mathbf{E}_{1G} &= E_0/c_0 + \mathbf{i}E_0v_1/c_0^2 \\
 \mathbf{E}_{1G}^2 &= E_0^2/c_0^2 + \mathbf{i}2E_0^2v_1/c_0^4 \\
 \sqrt{\text{Re } \mathbf{E}_{1G}^2} &= E_0/c_0 \\
 |\mathbf{E}_{1G}| &= E_0/c_0
 \end{aligned} \tag{11.28}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{2G} &= \mathbf{s}_{tG2} \times \mathbf{E}_1 \\
 \mathbf{E}_{2G} &= (1 + \mathbf{i}v_2/c_0) \times (E_0/c_0 + \mathbf{i}E_0v_1/c_0^2) \\
 \mathbf{E}_{2G} &= E_0/c_0 + \mathbf{i}E_0v_1v_2/c_0^3 \\
 |\mathbf{E}_{2G}| &= E_0/c_0 \\
 \mathbf{E}_{2G}^2 &= E_0^2/c_0^2 + \mathbf{i}2E_0^2v_1v_2/c_0^4 \\
 \sqrt{\text{Re } \mathbf{E}_{2G}^2} &= E_0/c_0
 \end{aligned} \tag{11.29}$$

Amint az a fentiekből látható:

$$|\mathbf{E}_0| = |\mathbf{E}_{1G}| = \sqrt{\operatorname{Re} \mathbf{E}_{1G}^2} = |\mathbf{E}_{2G}| = \sqrt{\operatorname{Re} \mathbf{E}_{2G}^2} \quad (11.30)$$

a **GALILEI geometriában** teljes invariancia érvényesül.

EUKLIDESZ-komplex számok:

$$\mathbf{E}_{1E} = \mathbf{s}_{tE1} \times \mathbf{W}_0 \quad (11.31)$$

$$\mathbf{E}_{1E} = \frac{1}{\sqrt{1 + v_1^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_1/c_0}{\sqrt{1 + v_1^2/c_0^2}} \times E_0/c_0$$

$$\mathbf{E}_{1E} = \frac{E_0/c_0}{\sqrt{1 + v_1^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{E_0 v_1/c_0^2}{\sqrt{1 + v_1^2/c_0^2}} \quad (11.32)$$

$$\mathbf{E}_{2E} = \mathbf{s}_{tE2} \times \mathbf{W}_{1E}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{2E} = & \left(\frac{E_0/c_0}{\sqrt{1 + v_1^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{E_0 v_1/c_0^2}{\sqrt{1 + v_1^2/c_0^2}} \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_2^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_2/c_0}{\sqrt{1 + v_2^2/c_0^2}} \right) \end{aligned} \quad (11.33)$$

$$\mathbf{E}_{2E} = E_0/c_0 \frac{1 - v_1 v_2/c_0^3 + \mathbf{i}(v_2/c_0 + v_1/c_0^2)}{\sqrt{1 + (v_1^2 + v_2^2)/c_0^2 + v_1^2 v_2^2/c_0^4}} \quad (11.34)$$

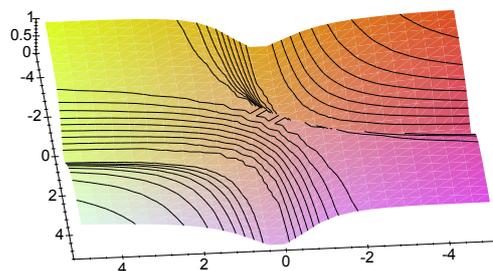
$$\operatorname{Re} \mathbf{E}_{2E}^2 = (E_0/c_0)^2 \frac{(1 - 2v_1 v_2/c_0^3)^2 - (v_2^2 + v_1^2/c_0^2)/c_0^2}{1 + (v_1^2 + v_2^2)/c_0^2 + v_1^2 v_2^2/c_0^4} \quad (11.35)$$

$$\operatorname{Im} \mathbf{E}_{2E}^2 = (E_0/c_0)^2 \frac{(v_1/c_0 + v_2)/c_0 - (v_1 v_2^2 - v_1^2 v_2/c_0)/c_0^4}{1 + (v_1^2 + v_2^2)/c_0^2 + v_1^2 v_2^2/c_0^4} \quad (11.36)$$

$$|\mathbf{E}_{2E}|^2 = (E_0/c_0)^2 \frac{v_1^2 + c_0^4}{c_0^2 (c_0^2 + v_1^2)} \quad (11.37)$$

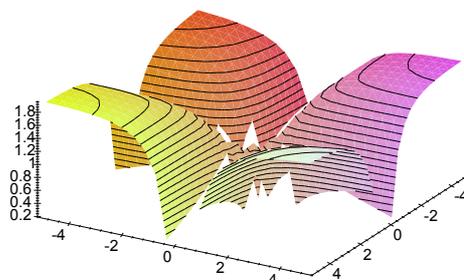
A fentiek közül állandó értéket ad az abszolút érték, amely azonosan 1-el egyenlő, azaz az Euklidesz transzformáció során a vektor hossza állandó, míg a négyzet-vektor valós része a két egymást követő transzformáció során nem egyformán viselkedik, ami azt jelenti, hogy a transzformációk sorrendjével szemben nem invariáns.

$$\operatorname{Re} \mathbf{E}_{2E}^2 / |\mathbf{E}_{2E}|^2 := \left(\frac{1 - 2v_1 v_2 + v_1^2 v_2^2}{1 + v_1^2 + v_2^2 + v_1^2 v_2^2} \div \frac{v_1^2 + 1}{(1 + v_1^2)} \right) \quad \text{ha } c_0 = 1$$



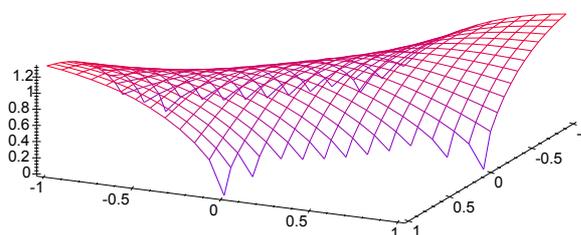
Négyzetvektor valós része / abszolútérték négyzete

$$(\operatorname{Re} \mathbf{E}_E^2)^{1/2} / |\mathbf{E}_E| := \left(\frac{(1 - 2 * v_1 * v_2)^2 - (v_2^2 + v_1^2)}{1 + v_1^2 + v_2^2 + v_1^2 * v_2^2} \right)^{0.5} \div \left(\frac{v_1^2 + 1}{(1 + v_1^2)} \right)^{0.5}$$



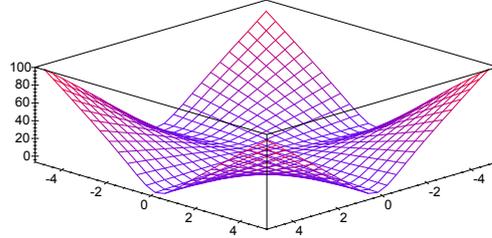
Négyzetvektor valós része / abszolút érték

$$(\operatorname{Re} \mathbf{E}_{2E}^2)^{1/2} / |\mathbf{E}_E| := \left(\frac{(1 - 2 * v_1 * v_2)^2 - (v_2^2 + v_1^2)}{1 + v_1^2 + v_2^2 + v_1^2 * v_2^2} \right)^{0.5} \div \left(\frac{v_1^2 + 1}{(1 + v_1^2)} \right)^{0.5}$$



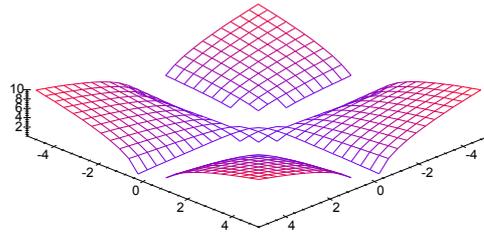
A vektornégyzet valós rész / abszolút érték kis értékénél.

$$\operatorname{Re}\mathbf{E}_E^2 = \frac{(1 - 2 * v_1 * v_2)^2 - (v_2^2 + v_1^2)}{\sqrt{1 + v_1^2 + v_2^2 + v_1^2 * v_2^2}}$$



A valós rész négyzete.

$$\operatorname{Re}\mathbf{E}_E = \left(\frac{(1 - 2 * v_1 * v_2)^2 - (v_2^2 + v_1^2)}{\sqrt{1 + v_1^2 + v_2^2 + v_1^2 * v_2^2}} \right)^{0.5}$$



Négyzetvektor valós rész négyzetgyöke.

MINKOWSKI-hiperbolikus komplex számok:

$$\mathbf{E}_{1E} = \mathbf{s}_{tE1} \times \mathbf{E}_0$$

$$\mathbf{E}_{1M} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_1/c_0}{\sqrt{1 - v_1^2/c_0^2}} \times E_0/c_0$$

$$\mathbf{E}_{1M} = \frac{E_0/c_0}{\sqrt{1 - v_1^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{E_0 v_1/c_0^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c_0^2}}$$

$$|\mathbf{E}_{1M}|^2 = (E_0/c_0)^2 \frac{1 + v_1^2/c_0^2}{1 - v_1^2/c_0^2} \tag{11.38}$$

$$\mathbf{E}_{1M}^2 = (E_0/c_0)^2 \frac{1 + v_1^2/c_0^2 + \mathbf{i}2v_1/c_0}{1 - v_1^2/c_0^2} \tag{11.39}$$

$$\mathbf{E}_{2M} = \mathbf{s}_{tM2} \times \mathbf{E}_{1M}$$

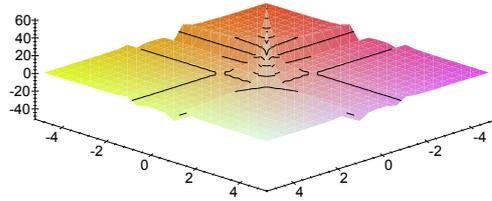
$$\mathbf{E}_{2M} = \left(\frac{E_0/c_0}{\sqrt{1 - v_1^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{E_0 v_1/c_0^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c_0^2}} \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_2/c_0}{\sqrt{1 - v_2^2/c_0^2}} \right) \\ \mathbf{E}_{2M} &= E_0/c_0 \frac{1 + v_1 v_2/c_0^3 + \mathbf{i}(v_2/c_0 + v_1/c_0^2)}{\sqrt{1 - (v_1^2 + v_2^2)/c_0^2 + v_1^2 v_2^2/c_0^4}} \\ \operatorname{Re} \mathbf{E}_{2M}^2 &= (E_0/c_0)^2 \frac{1 + v_1 v_2(4 + v_1^2 v_2^2/c_0^3)/c_0^3 + (v_2^2 + v_1^2/c_0^2)/c_0^2}{\sqrt{1 - (v_1^2 + v_2^2)/c_0^2 + v_1^2 v_2^2/c_0^4}} \quad (11.40) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} \mathbf{E}_{2M}^2 = (E_0/c_0)^2 \frac{(v_2 + v_1/c_0)/c_0 + (v_2^2 + v_1 v_2/c_0)v_1/c_0^4}{\sqrt{1 - (v_1^2 + v_2^2)/c_0^2 + v_1^2 v_2^2/c_0^4}} \quad (11.41)$$

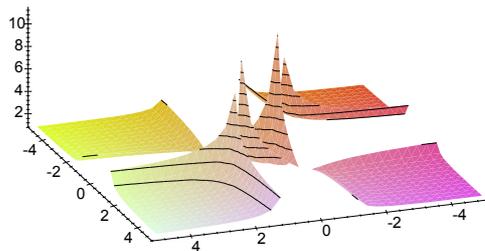
$$|\mathbf{E}_{2M}|^2 = E_0^2 \frac{c_0^6 + 4c_0^3 v_1 v_2 + v_1^2 v_2^2 + v_2^2 c_0^4 + c_0^2 v_1^2}{c_0^4 (c_0^4 - c_0^2 v_1^2 - c_0^2 v_2^2 + v_1^2 v_2^2)} \quad (11.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{2M} &= E_0/c_0 \frac{1 + v_1 v_2/c_0^3 + \mathbf{i}(v_2/c_0 + v_1/c_0^2)}{\sqrt{1 - (v_1^2 + v_2^2)/c_0^2 + v_1^2 v_2^2/c_0^4}} \\ |\mathbf{S}_{2M}|^2 &= \frac{1 + 4v_1 v_2 + v_1^2 v_2^2 + v_2^2 + v_1^2}{1 - v_1^2 - v_2^2 + v_1^2 v_2^2} \end{aligned}$$



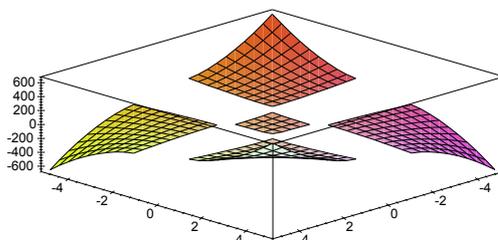
Abszolút érték négyzete

$$|\mathbf{S}_{2M}| = \left(\frac{1 + 2v_1 v_2 + v_1^2 v_2^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 + v_1^2}{-1 + v_1^2 + v_2^2 - v_1^2 v_2^2} \right)^{0.5}$$



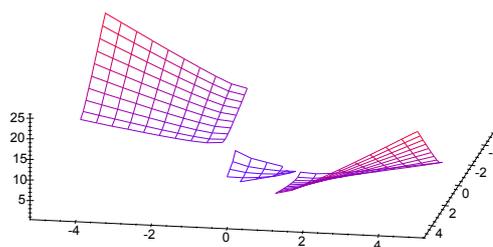
Abszolút érték

$$\operatorname{Re} \mathbf{S}_{2M}^2 := \frac{1 + v_1 * v_2 * (4 + v_1^2 * v_2^2) + (v_2^2 + v_1^2)}{\sqrt{1 - (v_1^2 + v_2^2) + v_1^2 * v_2^2}}$$



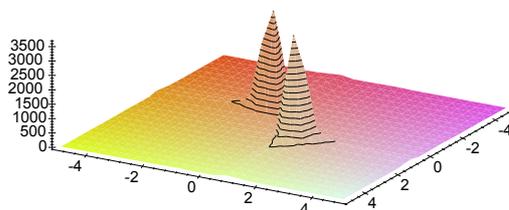
Négyzetvektor valós része.

$$\operatorname{Re} \mathbf{S}_{2M} := \left(\frac{1 + v_1 * v_2 * (4 + v_1^2 * v_2^2) + (v_2^2 + v_1^2)}{\sqrt{1 - (v_1^2 + v_2^2) + v_1^2 * v_2^2}} \right)^{0.5}$$



Négyzetvektor valós négyzetgyöke

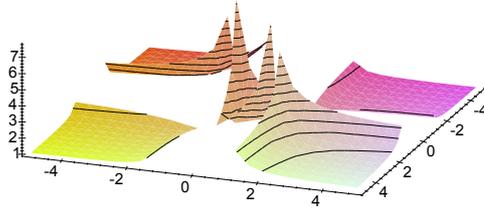
$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} \mathbf{S}_{2M}^2) / |\mathbf{S}_{2M}|^2 := & \left(\frac{1 + v_1 * v_2 * (4 + v_1^2 * v_2^2) + (v_2^2 + v_1^2)}{\sqrt{1 - (v_1^2 + v_2^2) + v_1^2 * v_2^2}} \right) \div \\ & + \left(\frac{-1 + 2v_1v_2 + v_1^2v_2^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 + v_1^2}{-1 + v_1^2 + v_2^2 - v_1^2v_2^2} \right)^2 \end{aligned}$$



Négyzetvektor valós része /abszolút érték

$$(\operatorname{Re} \mathbf{E}_{2M}^2)^{0.5} / |\mathbf{E}_{2M}| = \left(\frac{1 + v_1 * v_2 * (4 + v_1^2 * v_2^2) + (v_2^2 + v_1^2)}{\sqrt{1 - (v_1^2 + v_2^2) + v_1^2 * v_2^2}} \right)^{0.5} \div$$

$$+ \left(-\frac{1 + 2v_1v_2 + v_1^2v_2^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 + v_1^2}{-1 + v_1^2 + v_2^2 - v_1^2v_2^2} \right)^{0.5}$$



Négyzetvektor valós négyzetgyöke / abszolút érték

A megmaradó - invariáns mennyiséget, amint korábban már láttuk a vektorok teljesítményének abszolút értéke illetve annak négyzete:

$$|\mathbf{E}_{2G}| = E_0/c_0 \tag{11.43}$$

$$|\mathbf{E}_{2E}| = E_0/c_0 \tag{11.44}$$

$$|\mathbf{E}_{2M}| = E_0/c_0 \tag{11.45}$$

Ugyanakkor a vektorok valós része jelenti a kicsatolható valós teljesítményt, amely eltérő sebességű koordináta rendszerben a három geometria szerint a következő:

Euklidesz négyzetvektor valós része:

$$\text{Re } \mathbf{E}_{2E}^2 = (E_0/c_0)^2 \frac{(1 - 2v_1v_2/c_0^3)^2 - (v_2^2 + v_1^2/c_0^2)/c_0^2}{1 + (v_1^2 + v_2^2)/c_0^2 + v_1^2v_2^2/c_0^4} \tag{11.46}$$

Minkowski négyzetvektor valós része:

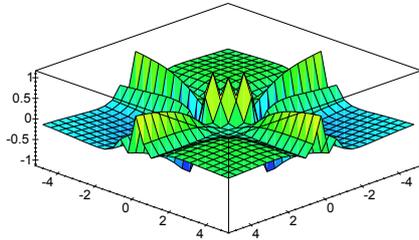
$$\text{Re } \mathbf{E}_{2M}^2 = (E_0/c_0)^2 \frac{1 + v_1v_2(4 + v_1^2v_2^2/c_0^3)/c_0^3 + (v_2^2 + v_1^2/c_0^2)/c_0^2}{1 - (v_1^2 + v_2^2)/c_0^2 + v_1^2v_2^2/c_0^4} \tag{11.47}$$

$$K_0 \ v = 0$$

$$K_2 \ v_1 \neq v_2$$

$$\text{Euklidesz hányados} = \frac{K_0}{K_1} = \frac{(1 - 2v_1v_2)^2 - (v_2^2 + v_1^2)}{1 + (v_1^2 + v_2^2) + v_1^2v_2^2} = \frac{1 + v_1v_2(4 + v_1^2v_2^2) + (v_2^2 + v_1^2)}{1 - (v_1^2 + v_2^2) + v_1^2v_2^2}$$

$$= (1 - 4v_1v_2 + 4v_1^2v_2^2 - v_2^2 - v_1^2) \frac{1 - v_2^2 - v_1^2 + v_1^2v_2^2}{(1 + v_2^2 + v_1^2 + v_1^2v_2^2)(1 + 4v_1v_2 + v_1^3v_2^3 + v_2^2 + v_1^2)}$$

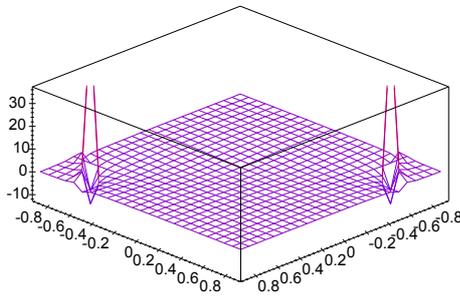


Az Euklidesz hányados.

Minkowski hányados $\frac{K_0}{K_1} = \frac{(1 - 2v_1v_2)^2 - (v_2^2 + v_1^2)}{1 + (v_1^2 + v_2^2) + v_1^2v_2^2} =$

$$\frac{1 + v_1v_2(4 + v_1^2v_2^2) + (v_2^2 + v_1^2)}{1 - (v_1^2 + v_2^2) + v_1^2v_2^2} =$$

$$= - \frac{1 - 2v_2^2 - 2v_1^2 + 7v_1^2v_2^2 - 4v_1v_2 + 4v_1v_2^3 + 4v_1^3v_2 - 4v_1^3v_2^3 - 5v_1^2v_2^4 - 5v_1^4v_2^2 + 4v_1^4v_2^4 + v_2^4 + v_1^4}{(1 + v_2^2 + v_1^2 + v_1^2v_2^2)(1 + 4v_1v_2 + v_1^3v_2^3 + v_2^2 + v_1^2)}$$



Euklidesz hányados kis értéknél.

Tehát a mért energia a $V=0$ és $v \neq 0$ eltérő inerciarendszerekben csak a *GALILEI* felfogás szerint állandó, a másik két felfogás szerint nem. Így az eltérő inerciarendszerekben a mérések, megfigyelések nem azonos eredménnyel járnak. Annak ellenére, hogy *Einstein* inerciarendszerekre vonatkozó követelménye teljesül a négydimenziós vektorok abszolút értékére, azaz a jelenség maga nem változik meg, a megfigyelés eredménye megváltozik. (Ezt természetesnek kell tekinteni mivel a vektor elforgatása a hosszát nem, de a vetületeit megváltoztatja.) A megfigyelés számára pedig csak az egyik komponens - az időszerű áll rendelkezésre. A térszerű komponens mérésére csak akkor lenne lehetőség ha zérus idő alatt véges teljesítményt tudnánk indikálni. Ez lehetetlen, zérus idő alatt indikált teljesítmény zérus.

Ez pedig azzal jár, hogy Einstein követelményét figyelembe véve két eltérő inerciarendszerből ugyanazt a folyamatot mérve csak úgy tekinthetjük egyformának, ha a mérés eredményét torzítjuk.

Mivel a szabadrészecske komplex energiavektorának abszolút értéke nem más mint a Hamilton függvény míg a négyzetvektor valós része a Langrange függvény

ezeknek pedig az *EUKLIDESZ* megfogalmazás felel meg (a *MINKOWSKI* féle megfogalmazás épp fordított eredményeket ad.)

A négydimenziós energiavektor és távolságvektor szorzatának valós része adja a szabad részecskére vonatkozó **Schrödiger egyenlet megoldásának valós részét**:

$$\Psi = e^{-it - p_x x - p_y y - p_z z} \quad (11.48)$$

ami nem más mint a komplex impulzus-lökés függvény valós része.

11.2. Négydimenziós vektorok differenciáljai

Tovább haladva a vektoranalízis fogalmában ismert nabla operátor négydimenziós változata is definiálható a következőképp:

$$\nabla = \frac{\partial}{c\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x_4} \mathbf{k} \quad (11.49)$$

A négydimenziós téridő vektor:

$$\mathbf{s} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

A téridő négydimenziós nabla operátora:

$$\nabla = \frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

A differenciál téridő vektor:

$$d\mathbf{r} = cdt + dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

11.2.1. NÉGYDIMENZIÓS PARCIÁLIS DERIVÁLTAK

A négydimenziós nabla operátort formális vektorként kezelve szorozhatunk egy másik négydimenziós vektort:

GALILEI-STUDY számok:

Általános vektor:

$$\nabla_G \times \mathbf{V}_G = \frac{\partial v_1}{c\partial x_1} \mathbf{i}_G + \left(\frac{\partial v_2}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_4}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_4} \right) \mathbf{j}_G + \left(\frac{\partial v_3}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_4}{\partial x_4} \right) \mathbf{j}_G + \left(\frac{\partial v_4}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_4} \right) \mathbf{k}_G$$

Téridő vektor:

$$\nabla_G \times \mathbf{S}_G = \frac{\partial a}{c\partial t} \mathbf{i}_G + \left(\frac{\partial b}{c\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial y} \right) \mathbf{j}_G + \left(\frac{\partial c}{c\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial y} \right) \mathbf{j}_G$$

$$\left(\frac{\partial d}{c\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y} \right) \mathbf{k}_G$$

A hagyományos vektoranalízis fogalmait használva:

$$\nabla_G \times \mathbf{S}_G = \frac{\partial \operatorname{Re} \mathbf{V}_G}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \operatorname{Im} \mathbf{V}_G}{c\partial t} + \operatorname{rot}(\operatorname{Im} \mathbf{V}_G)$$

EUKLIDESZ-komplex számok:

Általános vektor:

$$\nabla_E \times \mathbf{V}_E = \frac{\partial v_1}{c\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_4}{\partial x_4}$$

$$\left(\frac{\partial v_2}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_4}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_4} \right) \mathbf{i}_E$$

$$\left(\frac{\partial v_3}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_4}{\partial x_4} \right) \mathbf{j}_E$$

$$\left(\frac{\partial v_4}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_4} \right) \mathbf{k}_E$$

Téridő vektor:

$$\nabla_E \times \mathbf{S}_E = \frac{\partial a}{c\partial t} - \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial b}{c\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial y} \right) \mathbf{i}_E$$

$$\left(\frac{\partial c}{c\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial y} \right) \mathbf{j}_E$$

$$\left(\frac{\partial d}{c\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y} \right) \mathbf{k}_E$$

A hagyományos vektoranalízis fogalmait felhasználva:

$$\nabla_E \times \mathbf{S}_E = \frac{\partial \operatorname{Re} \mathbf{S}_E}{\partial x} \partial \mathbf{r}_e + \frac{\partial \operatorname{Im} \mathbf{S}_E}{c\partial t} - \operatorname{div}(\operatorname{Im} \mathbf{S}_E) + \operatorname{rot}(\operatorname{Im} \mathbf{S})$$

MINKOWSKI-hiperbólikus komplex számok:

$$\nabla_M \times \mathbf{V}_M = \frac{\partial v_1}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_4}{\partial x_4}$$

$$\left(\frac{\partial v_2}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_4}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_4} \right) \mathbf{i}_M$$

$$\left(\frac{\partial v_3}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_4}{\partial x_4} \right) \mathbf{j}_M$$

$$\left(\frac{\partial v_4}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_4} \right) \mathbf{k}_M$$

$$\nabla_M \times \mathbf{S}_M = \begin{array}{c} \boxed{\frac{\partial a}{c\partial t} - \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial z}} \\ \boxed{\left(\frac{\partial b}{c\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial y}\right) \mathbf{i}_M} \\ \boxed{\left(\frac{\partial c}{c\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial y}\right) \mathbf{j}_M} \\ \boxed{\left(\frac{\partial d}{c\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) \mathbf{k}_M} \end{array}$$

A hagyományos vektoranalízis fogalmait felhasználva:

$$\nabla_E \times \mathbf{S}_E = \frac{\partial \operatorname{Re} \mathbf{S}_E}{\partial x} \partial \mathbf{r}_e + \frac{\partial \operatorname{Im} \mathbf{S}_E}{c\partial t} + \operatorname{div}(\operatorname{Im} \mathbf{S}_E) + \operatorname{rot}(\operatorname{Im} \mathbf{S}) \quad (11.50)$$

11.2.2. KÉPZETES VEKTOROK PARCIÁLIS DERIVÁLTJAI
LEGYEN A $\mathbf{V} \equiv \operatorname{Im} \mathbf{V}$ AZAZ KÉPZETES VEKTOR:

$$\operatorname{Im} \mathbf{V} = 0 + v_2 \mathbf{i} + v_3 \mathbf{j} + v_4 \mathbf{k}$$

GALILEI-STUDY számok:

$$\nabla_G \times \operatorname{Im} \mathbf{V}_G = \begin{array}{c} \boxed{\left(\frac{\partial v_2}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_4}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_4}\right) \mathbf{i}_G} \\ \boxed{\left(\frac{\partial v_3}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_4}{\partial x_4}\right) \mathbf{j}_G} \\ \boxed{\left(\frac{\partial v_4}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_4}\right) \mathbf{k}_G} \end{array}$$

$$\nabla_G \times \operatorname{Im} \mathbf{V}_G = \partial \operatorname{Im} \mathbf{V}_G / c\partial t + \operatorname{rot} \operatorname{Im} \mathbf{V}_G \quad (11.51)$$

ahol a $\operatorname{rot}(\operatorname{Im} \mathbf{V}_G)$ kifejezés a vektoranalízis szerinti fogalom.

Azaz egy *Galilei térbeli vektor négydimenziós deriváltja*: két vektor, a sebességvektor és a rotációvektor összege. Tipikusan képzetes vektor: az impulzus időszerinti deriváltja az erő.

$$\mathbf{E} = E_0/c_0^2 + \mathbf{i}m_0v = m_0 + \mathbf{i}p \quad (11.52)$$

Ez a GALILEI rendszerben:

$$\mathbf{F} = dp/dt \quad \text{a klasszikus kifejezés}$$

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{p} = \partial \mathbf{p} / c \partial t + \text{rot } \mathbf{p} \quad \text{nem klasszikus kifejezés}$$

ha, csak impulzussal rendelkezik, de tömeggel nem:

$$\mathbf{F} = d|\mathbf{p}|/cdt + \text{rot } \mathbf{p}$$

Tehát ha egy mozgó test sebessége megváltozik egy gyorsító és egy forgató erő hatására, ennek egyszerű esete, ha:

$v_3 = v_4 = 0$ és a változás csak v_2 irányban létezik:

$$\mathbf{F} = m \, dv_2/dt$$

azaz megkapjuk a **NEWTON**-i erőtvényt.

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy egy mozgó test sebesség-változásra kényszerítése egy gyorsító és egy örvénylő hatással jár. Ez makrotesteknél nem észlelhető, elemi részecskénél a sebesség és a megváltoztató hatás soha nem esik egybe, ezért minden sebességváltozás szükségképpen örvénylést - térbeli tengely-körű forgatást idéz elő, azaz impulzusmomentummal-spinnel rendelkezik

Valós rész nélküli test prototípusa a foton, amelynek sebességváltozása esetén impulzusváltozásra kerül sor és egyben ha a kényszer és a sebesség iránya eltérő rotáció lép fel.

EUKLIDESZ-komplex számok:

$$\begin{aligned} \nabla_E \times \text{Im } \mathbf{V}_E &= \begin{matrix} \boxed{-\frac{\partial v_2}{c \partial x_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_4}{\partial x_4}} \\ \boxed{\left(\frac{\partial v_2}{c \partial x_1} + \frac{\partial v_4}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_4}\right) \mathbf{i}_E} \\ \boxed{\left(\frac{\partial v_3}{c \partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_4}{\partial x_4}\right) \mathbf{j}_E} \\ \boxed{\left(\frac{\partial v_4}{c \partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_4}\right) \mathbf{k}_E} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_E \times \text{Im } \mathbf{S}_E &= \begin{matrix} \boxed{-\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial z}} \\ \boxed{\left(\frac{\partial b}{c \partial t} + \frac{\partial d}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial y}\right) \mathbf{i}_E} \\ \boxed{\left(\frac{\partial c}{c \partial t} + \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial y}\right) \mathbf{j}_E} \\ \boxed{\left(\frac{\partial d}{c \partial t} + \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) \mathbf{k}_E} \end{matrix} \end{aligned}$$

A negatív divergencia azt jelenti, hogy a sebességváltozásra kényszerített test elnyeli az energiát, amely a változtatást előidézte. Amennyiben ez például egy foton

úgy a sebességváltoztatásra kényszerítő erő csak gravitációs tér vagy (töltéssel rendelkező) ütköző részecske lehet. Repülés szabad térben foton esetében, csak akkor lehetséges, ha divergenciája azonosan zérus.

Ez csak akkor lehetséges, ha $\nabla v_1 = \nabla t \equiv \text{zérus}$ vagyis az elektromágneses sugárzásban az idő állandó, ez a speciális relativitás egyik alapfeltevése. Ha az idő nem állandó, akkor a divergencia három tagjának zérust kell adnia. A $t = \text{const.}$ konfigurációs térben lévő három vektorkomponens változási sebességének kell zérust adni, ami akkor válik lehetségessé, ha a terjedési irány és a fotonvektor iránya merőleges egymásra. A fotonvektor az időben rezeg és a térben terjed.

Összefoglalva:

$$\begin{aligned} \nabla_E \times \text{Im } \mathbf{V}_E &= -\text{div Im } \mathbf{V}_E + \text{rot Im } \mathbf{V}_E + \partial \text{Im } \mathbf{V}_E / \partial t \\ \text{Re } \nabla_E \times \text{Im } \mathbf{V}_E &= -\text{div Im } \mathbf{V}_E \text{Re} \\ \text{Im } \nabla_E \times \text{Im } \mathbf{V}_E &= \text{Im } \mathbf{V}_E / \partial t + \text{rot Im } \mathbf{V}_E \end{aligned} \quad (11.53)$$

ahol a div és rot a vektoranalízis szokásos kifejezései. Amennyiben a derivált vektor valós része azonosan zérus, azaz veszteségmentes, úgy csillapítatlan rezgés terjed és forog a térben.

MINKOWSKI-hiperbolikus komplex számok:

$$\begin{aligned} \nabla_M \times \text{Im } \mathbf{V}_M &= \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_4}{\partial x_4} \\ &\left(\frac{\partial v_2}{c \partial x_1} + \frac{\partial v_4}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_4} \right) \mathbf{i}_M \\ &\left(\frac{\partial v_3}{c \partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_4}{\partial x_4} \right) \mathbf{j}_M \\ &\left(\frac{\partial v_4}{c \partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_4} \right) \mathbf{k}_M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_M \times \text{Im } \mathbf{S}_M &= \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial d}{\partial z} \\ &\left(\frac{\partial b}{c \partial t} + \frac{\partial d}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial y} \right) \mathbf{i}_M \\ &\left(\frac{\partial c}{c \partial t} + \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial y} \right) \mathbf{j}_M \\ &\left(\frac{\partial d}{c \partial t} + \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y} \right) \mathbf{k}_M \end{aligned}$$

LEGYEN A $\mathbf{V} \equiv \text{Re } \mathbf{V}$ AZAZ VALÓS – SKALÁR :

$$\mathbf{V} = v_1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

GALILEI-STUDY számok:

Legyen

$$\mathbf{V}_G = v_1$$

$$\nabla_G \times \mathbf{V}_G = \frac{\partial v_1}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \mathbf{i}_G + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \mathbf{j}_G + \frac{\partial v_1}{\partial x_4} \mathbf{k}_G$$

ha

$$x_1 = t$$

akkor

$$\nabla_G \times \mathbf{V}_G = \frac{\partial v_1}{c\partial t} + \text{grad}\mathbf{V}_G \quad (11.54)$$

EUKLIDESZ-komplex számok:

Legyen

$$\mathbf{V}_E = v_1$$

$$\nabla_E \times \mathbf{V}_E = \frac{\partial v_1}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \mathbf{i}_E + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \mathbf{j}_E + \frac{\partial v_1}{\partial x_4} \mathbf{k}_E$$

ha

$$x_1 = t$$

akkor

$$\nabla_E \times \mathbf{V}_E = \frac{\partial v_1}{c\partial t} + \text{grad}\mathbf{V}_E \quad (11.55)$$

MINKOWSKI-hiperbolikus komplex számok:

Ha

$$\mathbf{V}_M = v_1$$

$$\nabla_M \times \mathbf{V}_M = \frac{\partial v_1}{c\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \mathbf{i}_M + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \mathbf{j}_M + \frac{\partial v_1}{\partial x_4} \mathbf{k}_M$$

ha

$$x_1 = t$$

akkor

$$\nabla_M \times \mathbf{V}_M = \frac{\partial v_1}{c\partial t} + \text{grad}\mathbf{V}_M \quad (11.56)$$

Összefoglalva: amennyiben nem vizsgáljuk a valós komponens szerinti változást úgy az operátor megfelel formailag a vektoranalízis nabla operátornak és megkapjuk a vektoranalízis szabályait mindhárom geometriában.

KAPCSOLAT A VEKTORANALÍZIS ÉS A GEOMETRIÁK KÖZÖTT

A négydimenziós nabla operátor:

$$\nabla = \frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \quad (11.57)$$

A négydimenziós vektor:

$$\mathbf{V} = v_1(t, x, y, z) + v_2(t, x, y, z)\mathbf{i} + v_3(t, x, y, z)\mathbf{j} + v_4(t, x, y, z)\mathbf{k} \quad (11.58)$$

GALILEI-STUDY számok:

Ha:

$$Re\mathbf{V}_G \equiv 0 \quad Im\mathbf{V}_G \neq 0$$

ekkor:

$$Re(\nabla_G \times \mathbf{V}_G) \equiv 0$$

$$Im(\nabla_G \times \mathbf{V}_G) = rot\mathbf{V}_G$$

ha

$$Re\mathbf{V}_G \neq 0 \quad Im\mathbf{V}_G \equiv 0$$

ekkor

$$\boxed{Re(\nabla_G \times \mathbf{V}_G) = \frac{\partial V_G}{\partial t} + grad\mathbf{V}_G} \quad (11.59)$$

$$\boxed{Im(\nabla_G \times \mathbf{V}_G) = 0} \quad (11.60)$$

ha

$$Re\mathbf{V}_G \neq 0 \quad Im\mathbf{V}_G \neq 0$$

ekkor

$$\boxed{Re(\nabla_G \times \mathbf{V}_G) = \frac{\partial V_G}{\partial t} + grad\mathbf{V}_G} \quad (11.61)$$

$$\boxed{Im(\nabla_G \times \mathbf{V}_G) = rot\mathbf{V}_G} \quad (11.62)$$

A „**div**” fogalma ebben a geometriában nem definiálható - vagy pontosabban nem jön létre - ami fizikailag forrásmentességet jelent, azaz az erőtereknek nincs kiinduló helye, például a töltés vagy tömegpont nem értelmezhető. Összefoglalva a *GALILEI geometria* csak forrásmentes terekre alkalmazható.

EUKLIDESZ-komplex számok:

Ha

$$Re\mathbf{V}_E \equiv 0 \quad Im\mathbf{V}_E \neq 0$$

ekkor

$$Re(\nabla_E \times \mathbf{V}_E) = -div\mathbf{V}_E$$

$$Im(\nabla_E \times \mathbf{V}_E) = rot\mathbf{V}_E$$

ha

$$Re\mathbf{V}_E \neq 0 \quad Im\mathbf{V}_E \equiv 0$$

ekkor

$$Re(\nabla_E \times \mathbf{V}_E) = \frac{\partial \mathbf{V}_E}{\partial t} + grad\mathbf{V}_E \quad (11.63)$$

$$Im(\nabla_E \times \mathbf{V}_E) = 0 \quad (11.64)$$

ha

$$Re\mathbf{V}_E \neq 0 \quad Im\mathbf{V}_E \neq 0$$

ekkor

$$Re(\nabla_E \times \mathbf{V}_E) = \frac{\partial \mathbf{V}_E}{\partial t} + grad\mathbf{V}_E - div\mathbf{V}_E \quad (11.65)$$

$$Im(\nabla_E \times \mathbf{V}_E) = rot\mathbf{V}_E \quad (11.66)$$

azaz az *EUKLIDESZ* geometriában minden tiszta képzetes vektor divergenciája negatív eltérően a vektoranalízisbeli fogalomtól. (Ez nyilvánvalóan következik a vektoranalízisben használatos skalár szorzat definíciójából, amely nem *EUKLIDESZ* fogalom: a fizikai valóságban ez azt jelenti, hogy a tér és a részecskék energiája csökken a megfigyelés révén elvont energiával.)

Összefoglalva az *EUKLIDESZ* geometriában a negatív divergencia azt jelenti, hogy a tiszta vektortér vagy veszteségmentes vagy olyan nyelőkkel rendelkezik amelyek csillapítják a teret. A tiszta vektortérben nem lehetnek energiaforrások.

MINKOWSKI-hiperbolikus komplex számok:

Ha

$$Re\mathbf{V}_M \equiv 0 \quad Im\mathbf{V}_M \neq 0$$

ekkor

$$Re(\nabla_M \times \mathbf{V}_M) = div\mathbf{V}_M \quad (11.67)$$

$$Im(\nabla_M \times \mathbf{V}_M) = rot\mathbf{V}_M \quad (11.68)$$

ha

$$Re\mathbf{V}_M \neq 0 \quad Im\mathbf{V}_M \equiv 0$$

ekkor

$$Re(\nabla_M \times \mathbf{V}_M) = \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial t} + grad\mathbf{V}_M \quad (11.69)$$

$$Im(\nabla_M \times \mathbf{V}_M) = 0 \quad (11.70)$$

ha

$$\operatorname{Re} \mathbf{V}_M \neq 0 \quad \operatorname{Im} \mathbf{V}_M \neq 0$$

ekkor

$$\operatorname{Re}(\nabla_M \times \mathbf{V}_M) = \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial t} + \operatorname{grad} \mathbf{V}_M - \operatorname{div} \mathbf{V}_M \quad (11.71)$$

$$\operatorname{Im}(\nabla_M \times \mathbf{V}_M) = \operatorname{rot} \mathbf{V}_M \quad (11.72)$$

12. fejezet

Elektromágneses hullámeqyenlet

A négydimenziós nabla operátor konkrét alkalmazására a legegyszerűbb példa, ha feltételezzük, hogy adott egy valós-skalár tér- és képezzük ennek második komplex deriváltját az operátor segítségével. (Természetes mindhárom geometriában, mivel így hasznos összehasonlitásokra van lehetőség.)

Kezdeti definíciók:

$$\nabla_4 \times \nabla_4 = \nabla_4^2 \quad \nabla_4^2 \times \Phi = \mathbf{E}$$

$$\Phi = \Phi(t, x, y, z) \quad \text{a kiindulási skalár tér}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, x, y, z) \quad \text{az elektromos térerő}$$

A konkrét példához további konkrétizálás érdekében a négydimenziós tér - idő komplexumként tárgyaljuk:

$$x_1 = t; \quad x_2 = x; \quad x_3 = y; \quad x_4 = z$$

GALILEI-STUDY számok:

$$\nabla_G \times \Phi_G = \frac{\partial \Phi_G}{c \partial t} + \text{grad} \Phi_G = \mathbf{A} + \frac{\partial \Phi_G}{c \partial t}$$

$$\nabla_G \times \mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{A}$$

valamint

$$\nabla_G \times \frac{\partial \Phi_G}{c \partial t} = \frac{\partial^2 \Phi_G}{c^2 \partial t^2} + \text{grad} \left(\frac{\partial \Phi_G}{c \partial t} \right)$$

azaz a második derivált: \mathbf{E}_G

$$\nabla_G^2 \times \Phi_G = \mathbf{E}_G = \frac{\partial^2 \Phi_G}{c^2 \partial t^2} + \text{grad} \left(\frac{\partial \Phi_G}{c \partial t} \right) + \text{rot} \text{grad} \Phi_G$$

$$\text{Re} \mathbf{E}_G = \frac{\partial^2 \Phi_G}{c^2 \partial t^2} \tag{12.1}$$

$$\text{Im} \mathbf{E}_G = \text{grad} \left(\frac{\partial \Phi_G}{c \partial t} \right) \tag{12.2}$$

Amennyiben a skalár potenciál kétdimenziós tér - idő függvény:

$$\Phi = \Phi(x, t)$$

$$\mathbf{E}_G = \frac{\partial^2 \Phi_G}{c^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi_G}{c \partial t \partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 \Phi_G}{\partial x^2} \mathbf{i}^2$$

$$\operatorname{Re} \mathbf{E}_G = \frac{\partial^2 \Phi_G}{c^2 \partial t^2} \quad (12.3)$$

$$\operatorname{Im} \mathbf{E}_G = 2 \frac{\partial^2 \Phi_G}{c \partial t \partial x} \quad (12.4)$$

Ha folyamat veszteségmentes: $\operatorname{Re} \mathbf{E}_G = 0$

$$\frac{\partial^2 \Phi_G}{\partial t^2} = 0 \quad (12.5)$$

Ha folyamat veszteséges és a veszteség második deriváltja időben állandó:

$$\frac{\partial^2 \Phi_G}{\partial t^2} = k_0 \quad (12.6)$$

$$\Phi_G = k_2 t^2 + k_1 t + k_0 \quad (12.7)$$

Ebben az esetben 12.7 kifejezés parabolát, ábrázol, amely a *Galilei* geometria téridejében a térerő, egy nem definiált alakú rezgését írja le, amely elektromos teret sugároz le. Mivel a $k_2; k_1; k_0$ számhármassok végtelen sok térerő forrást írnak le, a 12.6.-12.7 kifejezések egy emittáló rezgő idő-síkot írnak le, amelyek az idő rezgéseit lesugároztva egydimenziós rezgő, csak az időben létező elemeket jelentenek, amik nagy hasonlóságot mutatnak a húrelmélet elemi részeivel. A sugárzásuk idő jellegű, ha három dimenzióban szemléljük akkor buborékok.

EUKLIDESZ-komplex számok:

$$\nabla \times \Phi_E = \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} + \operatorname{grad} \Phi_E$$

$$\text{ahol } \operatorname{grad} \Phi_E = \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{A}_E = -\operatorname{div} \mathbf{A}_E + \operatorname{rot} \mathbf{A}_E$$

$$\nabla \times \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi_E}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$$

azaz a második derivált: \mathbf{E}_E

$$\mathbf{E}_E = \frac{\partial^2 \Phi_E}{\partial t^2} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi_E + \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi_E$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\mathbf{E}_E &= \frac{\partial^2\Phi_E}{\partial t^2} - \operatorname{divgrad}\Phi_E \\ \operatorname{Im}\mathbf{E}_E &= \operatorname{grad}\frac{\partial\Phi_E}{\partial t} \end{aligned}$$

ha feltételezzük, hogy a folyamat valós része nem változik, azaz $\operatorname{Re}\mathbf{E}_E = 0$ akkor a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{\partial^2\Phi_E}{c^2\partial t^2} - \operatorname{divgrad}\Phi_E = 0 \quad (12.8)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_E}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi_E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi_E}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi_E}{\partial z^2} = 0 \quad (12.9)$$

12.10-12.11 formulák nem mások mint a négydimenziós hullámeqyenlet illetve a klaszikus skalár-potenciáltérre alkalmazott d'Alambert operátor.

Amennyiben a skalár potenciál kétdimenziós tér - idő függvény:

$$\Phi_E = \Phi_E(x, t)$$

$$\mathbf{E}_E = \frac{\partial^2\Phi_E}{c^2\partial t^2} + \frac{\partial^2\Phi_E}{c\partial t\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial^2\Phi_E}{\partial x^2}$$

$$\operatorname{Re}\mathbf{E}_E = \frac{\partial^2\Phi_E}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi_E}{\partial x^2} \quad (12.10)$$

$$\operatorname{Im}\mathbf{E}_E = 2\frac{\partial^2\Phi_E}{c\partial t\partial x} \quad (12.11)$$

Ha folyamat veszteségmentes: $\operatorname{Re}\mathbf{E}_E = 0$

$$\boxed{\frac{\partial^2\Phi_E}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi_E}{\partial x^2} = 0}$$

ez pedig nem más mint a kétdimenziós hullámeqyenlet.

Amennyiben a skalár potenciál csak a térváltozótól függ:

$$\Phi_E = \Phi_E(x, y, z)$$

$$\mathbf{E}_E = \nabla^2 \times \Phi_E = -\operatorname{divgrad}\Phi_E + \operatorname{rotgrad}\Phi_E$$

A térerő:

$$\mathbf{E}_E = -\operatorname{divgrad}\Phi_E \quad (12.12)$$

MINKOWSKI-hiperbolikus komplex számok:

$$\nabla \times \Phi_M = \frac{\partial \Phi_M}{\partial t} + \text{grad} \Phi_M$$

ahol $\text{grad} \Phi_M = \mathbf{A}_M$

$$\nabla \times \mathbf{A}_M = \text{div} \mathbf{A}_M + \text{rot} \mathbf{A}_M$$

$$\nabla \times \frac{\partial \Phi_M}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial t^2} + \text{grad} \frac{\partial \Phi_M}{\partial t}$$

azaz a második derivált: \mathbf{E}_M

$$\mathbf{E}_M = \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial t^2} + \text{divgrad} \Phi_M + \text{grad} \frac{\partial \Phi_M}{\partial t} + \text{rotgrad} \Phi_M$$

$$\text{Re} \mathbf{E}_M = \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial t^2} + \text{divgrad} \Phi_M \quad (12.13)$$

$$\text{Im} \mathbf{E}_M = \text{grad} \frac{\partial \Phi_M}{\partial t} \quad (12.14)$$

ha feltételezzük, hogy a folyamat valós része nem változik, azaz $\text{Re} \mathbf{E}_M = 0$ (A valós rész zérus mivolta a környezettől való függetlenséget reprezentálja) akkor kapjuk a következő eredményt:

$$\frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial t^2} + \text{divgrad} \Phi_M = 0 \quad (12.15)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial z^2} = 0 \quad (12.16)$$

Ami homogén elliptikus másodrendű differenciálegyenlet, mint az az elméletből ismert a nyugalmi állapotok egyensúlyi helyzete (stacionáris hőterjedés, rugalmas deformáció, sztatikus erőter) leírására alkalmas. Különleges jelentőségű, hogy a vektoranalízis elektromágneses jelenségekre történő alkalmazásához egy induló feltételt szoktak posztulálni, ami döntően megváltoztatja a helyzetet nevezetesen:

$$\boxed{\mathbf{v} = -\text{grad} \phi} \quad (12.17)$$

ezzel kapcsolatosan érdemes az alábbi idézetet, figyelembe venni:

„..... c.) **Az örvénymentes tér forrásos tér**

Oldjuk meg először az alábbi egyszerűbb feladatot:

$$\text{div} v = g \quad (15)$$

$$\text{rot} v = 0 \quad (16)$$

az egész térben. A v_n értékét az egész teret határoló végtelen távoli felületen kell előírni. Ezt természetesen nullának tekintjük, később azonban beszélünk arról is, hogy milyen mértékben kell v_n -nek a végtelenben nullához tartania.

A (16) egyenletből következik, hogy $v = -grad\phi$, tehát ϕ levezethető egy skalárpotenciálból.

A negatív előjel teljesen lényegtelen, és csak a későbbi alkalmazásokhoz való illeszkedés kedvéért vettük fel. Helyettesítjük ezt (15) egyenletbe, akkor a ϕ potenciál meghatározására az alábbi összefüggést kapjuk:*

$$div grad\varphi = \Delta g = -g \quad (17)$$

.....”

([37] Simonyi Károly: Elméleti villamosságtan 72. oldal. Budapest, Tankönyvkiadó, 1986.)

Nem szabad elfelejteni, hogy a fenti idézet *Simonyi Károly* könyvéből a vektoranalízis tárgyalásának részéből származik, ahol:

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1 \quad (12.18)$$

azaz megegyezik a hiperbolikus komplex számoknál használt képzetes egységekkel.

$$\frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial t^2} + div(-grad\Phi_M) = 0 \quad (12.19)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial z^2} = 0 \quad (12.20)$$

és ennek az önkényes előjelnek következménye a klasszikus hullámegyenletet. Mindez megmagyarázza Einstein eljárását, nevezetesen azt, hogy **a hiperbolikus komplex számok alkalmazására kényszerült, ami a MINKOWSKI GEOMETRIÁT és a LORENTZ TRANSZFORMÁCIÓT egyaránt magában foglalta.** A 18. században bevezetett az $\mathbf{E} = -grad\phi$ posztulátumhoz valóban a *Mikowski geometria és a hiperbolikus komplex számok* tartoznak, ha az elektromágneses hullámok kiszámítására a **hullámegyenlet a megfelelő matematikai formula**, ahol az alapvető szabály:

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = 1}$$

Mindebből az a következtetés vonható le, hogy az elektromágneses terekre nem a MINKOWSKI geometria az érvényes, mivel az csak további önkényes feltétellel igazítható az eredményekhez. Míg az EUKLIDESZ geometriához kapcsolódó komplex számrendszer következetes alkalmazásával az ismert és kísérletileg igazolt eredményt adja.

*Kiemelés tőlem: a szerző.

13. fejezet

Elliptikus geometria

13.1. Az ívelemnégyszet

13.1.1. Az ívelemnégyszet eredete

Bevezetesként célszerű elgondolkozni azon, mi is az ívelemnégyszet, erre csak azt tudjuk mondani *Einstein által konstruált fogalom*. Ez a fogalom valójában egy egyszerű tényt akart kikerülni, azt, hogy az idő más mint a tér. Ezt a másságot könnyű volt belevinni az elméletbe, hogy különbözzön az addigi felfogástól. Ez a különbség mint már láttuk: egy negatív előjel, könnyen magyarázható beépítése volt a relativitásba. A beépült negatív előjel -a 18.-k századból származott- és ezzel megoldotta, hogy *Lorentz* valós számaiból, *Minkowski* számok lettek és ezáltal a hullámegyenlet az elektrodinamika egyik legfontosabb egyenlete is megmaradt a speciális relativitás egyenlet részének.

Ismeretes, hogy a *Descartes* koordináta rendszerre igaz az alábbi állítás:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R \quad (13.1)$$

elforgatva és eltolva

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R_1 \quad (13.2)$$

viszont igaz állítás, hogy

$$R_1^2 = R^2 \quad (13.3)$$

Ha figyelembe vesszük a négydimenziós teret, ahol az infinitézimális ívelem:

$$ds = (dx_1; dx_2; dx_3; dx_4) \quad (13.4)$$

ennek térkomponense

$$ds = (dx_1; dx_2; dx_3) \quad (13.5)$$

és időkomponense

$$dx_4 = ict \quad (13.6)$$

ekkor a *Lorentz* téridőben az infinitézimális négyzetösszeg, a *Minkowski* féle négydimenziós koordináta rendszerben:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2 \quad (13.7)$$

illetve macroméretekben

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = L \quad (13.8)$$

ugyancsak igaz az állítás, hogy ha

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2 t_1^2 = L_1 \quad (13.9)$$

$$L = L_1 \quad (13.10)$$

Azaz $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1$ Descartes invariancia, helyett a Minkowski geometriában az $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1$ Minkowski indefinit invarianciája az alapvető követelmény. Ez az állítás a parciális differenciálegyenletekből származik.

13.1.2. A parciális differenciálegyenletek

A fizikai feladatok megoldása gyakran valamilyen parciális differenciálegyenlet egy adott térrészre történő megoldása (ezek lehetnek homogének és inhomogének). Általában:

1. Elliptikus egyenletek írják le az egyensúlyi helyzeteket (többek között a stationárius hőterjedést és a sztatikus elektromos erőteret).
2. Parabolikus egyenletek a hővezetést és a diffúziót.
3. Hiperbólikus egyenletek a hullámokat és a csillapított rezgéseket.

Mivel *Einstein* a fénysebesség határsebesség szerepéhez mindvégig ragaszkodik innen veszi azt a karakterisztikus kifejezést is amit **ívelemnégyzetnek nevez:**

„...A parciális differenciálegyenletek... általános alakja:

$$\sum_{i,k=1}^m a_{i,k} u_{ixk} + \sum_{i=1}^m b_i u_{xi} + cu + d = 0 \quad (5.7)$$

ahol az a_{ik}, b_i, c, d együtthatók az x_1, \dots, x_m változók adott függvényei és $a_{ik} = a_{ki}$. Az (5.7) differenciálegyenletet **hiperbolikusnak nevezik**.

A következőkben feltesszük, hogy az $m=4$ - x_4 koordinátát t -vel, az x_1, x_2, x_3 koordinátákat pedig x, y, z - vel jelöljük. A hiperbolikus differenciálegyenletet az jellemzi, hogy vannak olyan megoldásai, amelyek legalábbis közelítőleg (kis térbeli tartományokra szorítkozva), „síkhullámok”. Csak állandó együtthatójú (másod vagy magasabbrendű) lineáris hiperbolikus differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

Az ilyen egyenlet $u(x, y, z, t)$ megoldását *síkhullámnak* nevezzük, ha

$$u(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct) \quad (5.8)$$

ahol α, β, γ kielégítik az

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (5.9)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 = c^2 \quad (13.11)$$

feltételt és azon irány iránycosinusainak tekinthetők, amelyben a hullám tovaterjed; a „ c ” állandó: a terjedés sebessége. Ez a megoldás a négydimenziós tér—idő

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - ct = \text{const.} \quad (13.12)$$

felületű hipersíkja minden pontjában valóban ugyanazt az értéket veszi fel. Ez a hipersík ama kétdimenziós sík „trajektóriájának” tekinthető, amely sík normálisának iránykoszinuszai α, β, γ és amely sík c sebességgel mozog. Ezt a mozgó síkot az *állandó fázis síkjának* vagy *hullámfrontnak* nevezzük.

Speciálisan a megoldást:

$$u = Ae^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct)} \quad \mathbf{i}^2 = -1 \quad (5.10)$$

alakban kereshetjük, ahol a komplex exponenciális függvény arra utal, hogy valós és képzetes része külön-külön is megoldás. Az exponenciális síkhullámok általános elméletét a másodrendű egyenletek példáin mutatjuk be,

Az

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (5.11)$$

potenciálegyenletnek nincs exponenciális síkhullám megoldása.*Ha ui. az (5.10) kifejezést az (5.11) egyenletbe helyettesítjük, az (5.9) feltételnek ellentmondó $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ egyenletet kapunk. Ez az (5.11) egyenlet elliptikus jellegének következménye.

A

$$c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt}) = 0$$

hiperbólikus hullámegyenletet azonban kielégítik a tetszőleges irányban, rögzített c sebességgel terjedő síkhullámok.

Bizonyítható [2], hogy minden állandó együtthatójú, másodrendű differenciálegyenlet a változók megfelelő transzformációjával a következő alakra hozható:

$$u_{tt} = \nabla^2 u + ku$$

Felvetődik a kérdés, hogy milyen nem szükségképpen exponenciálisan síkhullámok lehetnek a fenti egyenlet megoldásai. Ha az a (5.8) kifejezést (5.12)-be helyettesítjük és (5.9) –et figyelembe vesszük, a következő szükséges feltételt kapjuk a c sebesség és az f függvény közötti kapcsolatra:

$$(1 - c^2)f'' + kf = 0 \quad (5.13)$$

Két esetet különböztetünk meg. Ha $k = 0$, tetszőleges alakú f hullám kielégíti az egyenletet, ha terjedési sebessége egységnyi. Ha $k \neq 0$, az

*Ez csak az Euklidesz-i geometriában igaz. A Galilei geometriában van megoldás.

(5.13) feltétel az f függvényre vonatkozó közös differenciálegyenlet. Ennek megoldása

$$A \exp \left[\pm i \left(\frac{k}{1-c^2} \right)^{1/2} (\alpha x + \beta y + \gamma z - ct) \right]$$

a síkhullám tehát már nem lehet tetszőleges, hanem csak exponenciális alakú, és terjedése a frekvencia függvénye. Az első esetet *diszperziómentesnek* nevezzük, mivel bármely f hullám tovaterjedés közben megtartja alakját. A második esetben egy tetszőleges hullámalak *Fourier*-analízissel exponenciális komponensek összegeként állítható elő. E komponensek a térben különböző sebességgel terjednek, egy bizonyos idő eltelte után szuperpozíciójuk tehát az eredeti hullámhoz képest *eltorzult* alakot szolgáltat.

A gyakorlat szempontjából a síkhullámok a lineáris parciális differenciálegyenletek szempontjából fontosak, ilyen egyenletek általános megoldását ui. gyakran mint a síkhullámok szuperpozícióját állítjuk elő.”

([38] EDWIN F. BECKENBACH: Modern Matematika Mérnököknek, 103-104. o. Budapest, Műszaki Könyvkiadó.1960.)

13.1.3. A hiperbolikus téridő

A speciális relativitás elméletében *Einstein* posztulálta a fénysebesség állandóságát az eltérő sebességű merev metrikájú inercia rendszerekben. A fenti idézetben, amely a hullámok származtatását tárgyalja, nem szerepel semmiféle előre definiált koordináta-rendszer, pontosabban minden inerciális rendszerben, amelyben vákuum van a téridő kontinuumban a fény azonos. A fény illetve az elektromágneses hullám az idézett mű szerint csak három térdimenziós szerkezetű térben létezhet. Azonban *Einstein* nevezetes fogalmazása szerint az ívelemnégyszet alkalmazásával négydimenziós téridőre építi fel az elektromágneses hullámok terjedésére alkalmas kontinuumot. Ezt a kontinuumnak, amelyet a *Lorentz* -féle ívelemnégyszet jellemez (...) *Einstein pszeudoeuclidészi-Minkowski térnek* nevezi. Azonban a fenti levezetés a klasszikus matematika **vektoranalízis fejezetébe tartozik, melyben a térbeli egységvektorok $i; j; k$, melyeknek négyzete $i^2 = j^2 = k^2 \equiv 1$.**

Azonban a **hiperbolikus geometriában és a hiperbolikus számok körében a t egységvektora $\equiv \sqrt{-1}$, míg $i^2 = j^2 = k^2 \equiv 1$, a négydimenziós ívelemnégyszet :**

Itt nem szabad elfelejteni, hogy a négydimenziós térben is és a háromdimenziós hullám terjed.

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (13.13)$$

Ami nem egyezik meg (12.16) formulával. És különösen zavaró, hogy amint azt 12. fejezetben bemutattuk a *pszeudoeuclidészi-Minkowski geometriához* tartozó hiperbolikus hullámegyenlet:

$$\frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial z^2} = 0 \quad (13.14)$$

Ami nem más mint a vektoranalízisben szereplő elliptikus hullámegyenlet:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial t^2} = 0 \quad (13.15)$$

Ott azt is idéztük, hogy a hiperbolikusság, mint jelző a matematikában általában és a **vektor algebrában— analízisben épp felcserélve szerepelnek. Ennek az az oka, hogy a vektorok esetében a hiperbolikus egységvektorok felhasználása az általános.**

Az elliptikus geometriában, melynek kicsiny méreteken az Euklidesz geometria felel meg, a matematikában megszokott módon alkalmazzák az egység vektorokat, azzal a különbséggel, hogy az *elliptikus-Riemann* geometriában használt \mathbf{g} nem „egységvektor” és értéke nem $\mathbf{1}$ felhasználása általánosabb jellegű, mint az $\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}$ egységvektorok felhasználása.

A fény minden geometriában azonos módon geodetikus vonalakon terjed, de míg a merev metrikus metrikákban —*Galilei, Euklidesz-i, Minkowski*— a geodetikus vonalak is egyenesek, a görbült *elliptikus-Riemann* geometriákban görbülték a geodetikusok.

Azonban a *Minkowski* geometriában és így a speciális relativitás elméletében is az ívelemnégyzet a geometria különös volta miatt a fényre vonatkozó ívelemnégyzet határozatlan értéket vesz fel. Ugyanis

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 &= s^2 \text{ ahol } s^2 \neq 0 \\x^2 + y^2 + z^2 &= c^2t^2\end{aligned}$$

illetve a

$$\begin{aligned}dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 &= ds^2 \text{ ahol } ds^2 \neq 0 \\dx^2 + dy^2 + dz^2 &= c^2dt^2\end{aligned}$$

alakok a fényre nézve csupán kis térbeli tartományban síkhullám, de s illetve ds bármilyen értéket felvehet 0 és ∞ között. A differenciális formula alapján azonban mód van egy eltérő értelmezésre, mivel *Einstein* formulája, nem elégíti ki a hiperbolikus hullámegyenletből származó azon követelményt, hogy csak **három térdimenziós térben lehetséges az elektromágneses hullám terjedése.** Az *Einstein-i* formula ugyanis **négydimenziós téridőről** tartalmaz állítást, amelyen belül a **tér és az idő megkülönböztethetetlen és egymásba minden egyéb kikötés nélkül átalakulhat.** Formálisan az ívelemnégyzet formula dimenziójában **négy téridődimenziójú mennyiséget tartalmaz, pontosabban ötöt, mivel s és ds is téridődimenziójú.** Ebből adódik, hogy valójában *Einstein-féle négydimenziós világ valójában ötdimenziós és ezért lehet benne Hyngens elvet kielégítő hullámok - információ továbbításra alkalmas hullámok keltése és terjedése - ugyanis nem szabad elfelejteni, hogy Einstein tétele a fénysebesség állandóságáról, csak a csoportsebességre igaz, azaz az információ továbbítására alkalmas Δf sávzélességű hullámok összegére.*

$$\sum_{\Delta f} -ds^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 \neq 0$$

illetve

$$\sum_{\Delta f} -s^2 + x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \neq 0$$

viszont az ötdimenziós térben már van megoldása a hiperbolikus hullámegyenletnek, de az elvi megoldás lehetősége ellenére ötdimenzióban, matematikailag nehéz torzításmentes hullámokat találni mivel a hullámot leíró f függvény magasabbrendű

differenciálhányadosai is megjelennek. Ezzel kapcsolatban az alábbiakban foglaltakat érdemes figyelembe venni:

A parciális egyenlet hiperbolikus megoldása és a hiperbolikus geometria a kapcsolódó hiperbolikus komplex számokhoz nem ugyanabba a fogalomkörbe tartoznak, mert

- $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1$ *Descartes invariancia* helyett a *Minkowski geometriában* az $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1$ *Minkowski invariancia* az alapvető követelmény.

Ez a kifejezés is létezik parciális differenciálegyenletekkörében, ott az alábbi formában:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (13.16)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (13.17)$$

Mindebből az következik, hogy az *Einstein* által feltételezett inerciális rendszerek —amelyekre igaz a $ds^2 = \text{constans}$ követelmény,— valójában nem léteznek a valós világban, mivel nincs gravitáció nélküli hely. Azt pedig igen nehezen lehet bizonyítani, hogy két egymástól térbeli távolságban pontosan azonos a gravitációs tér, ami biztosítaná a fény útjának azonos hosszát. Mindenesetre a Földön végzett mérések esetén az idézetben szereplő két dimenzióbecslés ($5 \cdot 10^{-7}$ illetve $3.6 \cdot 10^{-11}$) olyan csekély értékű, hogy az elektromágneses hullámok, szempontjából a térben megtett utak, igen kis hullámtorzításokig háromdimenziósnak tekinthetők.

Végül a négydimenziós Riemann differenciális ívelemnégyzet:

$$(ds)^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{13}dx^1dx^3 + \quad (13.18)$$

$$+ 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^3)^2 + 2g_{14}dx^1dx^4 + 2g_{24}dx^2dx^4 + \quad (13.19)$$

$$+ 2g_{34}dx^3dx^4 + g_{44}(dx^4)^2 \quad (13.20)$$

ahol a $g = g(x^1, x^2, x^3, x^4)$ innen könnyen látható *Riemann ívelemnégyzet* nagyfokú változékonysága, és azt is érdemes megjegyezni, hogy a gravitáció másodfokúan változik, nincs is szükség magasabbrendű ívelemnégyzetre, amennyiben a gravitáció görbülete magasabbrendű, akkor gravitációs szuperpozíció esete áll fenn, vagyis másodfokú komponensekre lehet bontani.

Itt könnyen bizonyítható, hogy igen kicsi méretek esetében :

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = (-g_{44}) = 1 \quad (13.21)$$

$$g_{ik} = g_{ki} = 0 \quad \text{ha } i \neq k \quad (13.22)$$

ekkor megkapjuk az *Euklidesz-féle geometriát*, másrészt, hogy a folyamatos kovariáns transzformációt

$$g_{ik} \neq g_{ki} \quad (13.23)$$

ezek az együtthetők folyamatosan változó koordináta függvényeit hozzák létre.

Tehát végül is: az **ívelemnégyzet** nem más, mint egy térgörbe darab, melynek koordinátái négyzetösszegének és a koordináták együtthetői megszabják a koordináta-rendszert. Lényeges, hogy a *Riemann ívelemnégyzet mindig definit. De a Minkowski-féle indefinit metrikájú térben nem jön létre elektromágneses hullám, ezért az pusztán elméleti konstrukció. Továbbá nem elhanyagolható, hogy Minkowski metrikájában felvett értékek a $-\infty \Leftrightarrow \infty$ között változhatnak elvileg, míg Riemann metrikájában $0 \Leftrightarrow \infty$ végtelen között változhat.*

13.2. Az általános relativitás, Riemann geometria.

Az első kérdés valójában, miért született meg a **speciális relativitás elméletének** elsöprő sikere után az **általános relativitás elmélete**. A probléma ami körül folyt a tudományos vita a speciális relativitás kapcsán: létezik-e az éter, ami a korábbi feltevések szerint a fény anyagi hordozója volt, ennek létezéséről folyó vita végül is a **speciális relativitás és Einstein** sikerét hozta, aki tagadta az éter létezését.

Mostanra természetesen megváltozott a helyzet, az utóbbi évtizedek csillagászati kutatásai feltárták, hogy igen nagy tömegű ismeretlen úgynevezett „sötét anyag és energia tölti ki az Univerzumot”, amelyben halad a fény is, hogy valójában milyen hatással van az elektromágneses hullámokra nem tisztázott, az azonban igen, hogy a barionos anyaggal a csatolódája igen csekély, lehetséges, hogy ez a tény teljesen új helyzetet teremt.

De lényeges volt, hogy a *speciális relativitás elmélete* az anyagi eredetű gyorsító erőhatások tilalmára épült: a mezőmentes térben anyagi erőhatások — a tömegvonzás sem — nem érvényesülhetnek, ennél fogva a mozgó test tömege nem változhat, azaz a test tömege minden eltérő inerciarendszerben, más és más, de állandó. Ugyanakkor ismert, hogy *Einstein* a relativisztikus mechanika és elektrodinamika keretébe bevezeti a gyorsulás, erő, mezőintenzitás és a többi fogalmat, ezek azonban máris szembefordul kiinduló posztulátumaival.

Tulajdonképpen azt a tételt kellett megvédeni, amely *Einstein* számára a legnagyobb sikert hozta:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad E = mc^2 \quad (13.24)$$

$$\text{ha } v \ll c \Rightarrow m - m_0 \approx \frac{1/2(m_0 v^2)}{c^2} \Rightarrow \Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \quad (13.25)$$

vagyis a vizsgált fizikai rendszer tömege együtt növekszik annak energiájával, azaz a gravitációs mező egy pontjában a gravitációs gyorsulás nem állandó, hanem függ a vizsgált test sebességétől.

Mielőtt továbbhaladnánk érdemes megvizsgálni, a hogy a speciális relativitás elmélet 3 fontos tétele helytálló-e? (Ha biztosak vagyunk abban, hogy egy meghatározott szilárd testet gyorsítunk, akkor nyilvánvaló, hogy impulzusa nő, ez két komponensből állhat: a tömegéből és sebességéből.). Tekintsünk most a sebességnövekedéshez kapcsolódó 3 fontos tételt: az időlassulás; a távolság rövidülés és a tömegnövedést.

Ezért vegyünk két egyforma rakétát, K_m a lassabb, és a gyorsabb K_n . A lassabb az R_1 megfigyelő, sebessége v_m és a gyorsabb R_2 megfigyelt sebességű v_n rakétákat úgy, hogy sebesség különbség $v_{nm} > 0$ mindig fennálljon, és ezek repülése inercia rendszerben történjék tehát :

$$v_m < v_n \Rightarrow \Delta t_n = \frac{\Delta t_m}{\sqrt{1 - v_{nm}^2/c^2}} \Rightarrow \Delta t_m < \Delta t_n$$

ha most kijelölünk egy a rakéta haladásának irányvonalán mérési pontot, és mérjük K_m koordináta rendszerből a idő alatt elhaladó hosszt és vizsgáljuk a tömeget, akkor úgy találjuk, hogy :

$$l_n = l_m \sqrt{1 - v_{nm}^2/c^2} \quad \text{és} \quad m_n = \frac{m_m}{\sqrt{1 - v_{nm}^2/c^2}}$$

tehát valóban a gyorsabban haladó test hossza kisebb és tömege nagyobb.

Célszerű azonban a tér, idő és tömeg sebesség függését, kissé részletebben is megvizsgálni:

Alaposabban meg kell vizsgálni, hogy ezek sebességgel változó mennyiségek asszimptotikusan vagy extrém esetekre is igazak-e, mert ezzel kap-csolatban Einstein semmiféle korlátot nem ad meg. Pedig extrém esetekben a fenti mennyiségekre zérus és végtelen eredmények adódnak. Azt, hogy Einstein extrém esetre is érvényesnek tartotta ezeket az összefüggéseket az ikerparadoxon példája is igazolja, a μ mezon élettartamának növekedése, amely ultrarelativisztikus jelenség ezt megerősíti.

(Az alábbiakban kitevőben lévő „ k ” mindig az utolsó megfigyelt eseményt jelzi, és értelemszerűen a „ $k - 1$ ” az utolsó előttit.)

- Az idő: a sebesség növekedésével az idő lassulása lép fel:

$$t_n = \frac{t_m}{\sqrt{1 - v_{nm}^2/c^2}}$$

- A hossz: a sebesség növekedésével csökken:

$$l_n = l_m * \sqrt{1 - v_{nm}^2/c^2}$$

- A tömeg: a sebesség növekedésével a tömeg növekedése lép fel:

$$m_n = \frac{m_m}{\sqrt{1 - v_{nm}^2/c^2}}$$

Most tételezzük fel, hogy mindkét rakéta elkezd gyorsítani egészen addig, míg a megfigyelt el nem éri a fénysebességet, mit tapasztal a megfigyelő rakéta, amely folytonosan úgy manőverezik, hogy ha le is marad, de nem veszti el megfigyelt célpontját. Ekkor:

1. Az idő múlása: $t_n^k = t_n^{k-1}/0 \equiv \infty$, azaz a megfigyelt rakéta belsejében az ottlévők míg korábban semmit sem érzékeltek a lassulásból, ekkor minőségi változás következik be, mert minden történés, amely időben zajlik le, a lassulásból mozdulatlanság keletkezik, ez pedig maga a halál, a hajtómű pedig leáll. Ha ez nem fogadható el akkor az ikerparadoxon sem igaz, és az időlassulás tétele csupán a megfigyelő számára igaz.
2. A hossz csökkenése: $l_n^k = l_n^{k-1} * 0$, azaz a megfigyelt rakéta a megfigyelő számára, megfigyelhetetlen zérus hosszúságúvá válik, azaz a folyamatos megfigyelés és érzékelés során villámgyorsan eltűnik.
3. A rakéta tömege: $m_n^k = m_n^{k-1}/0 = \infty$ azaz a rakéta tömege az egyre növekvő tömegből hirtelen végtelen nagy tömegűvé válik és a tömegvonzása is végtelen nagy lesz, azaz egy fekete lyukká válik. Ennek következménye kettős: a megfigyelő rakétát igen nagy erővel saját magához vonzza, valamint a körülötte lévő galaktikus térben lévő részecskéket magához vonzza, és tér jelentős bár kiszámíthatatlan része kiürül.

Ebből a három jelenségből következik: mindkét rakéta elvész, a rajta tartozkodó személyzettel együtt visszavonhatatlanul és örökre. Ezzel kapcsolatban még azt kell megjegyezni, hogy a fenti jelenségek alapja az a matematikai tény, hogy a sebességfüggvény, amely az *Euklides féle geometriában* született meg, mint tangens függvény, eleve tartalmaz szinguláris helyet a $\pi/2$ helyen és ennek egyfajta öröksége a fénysebesség ilyen furcsa viselkedése. (lásd: 26-27. oldal és 3.számú. Melléklet.)

Ezután már csak azt kell megvizsgálni, hogy ebben az *Einstein* által megálmodott téridő kontinuumban van-e olyan jelenség, ami mindezt lehetetlenné teszi. Kiderült, **Eötvös Lóránd kísérletei nyomán**, hogy van, a gravitációs mezőkben-terekben a tehetelen tömeg és a súlyos tömeg nagy pontossággal egyenlő, így ott a *speciális relativitás* nem érvényes. Azonban az *Eötvös Lóránd műszerének terében annak kicsiny volta miatt a görbült Riemann tér állandó ezért mindenütt állandó volt a tehetetlen és a gravitáló tömeg*. *Einstein* természetesen meg akarta menteni korábban kidolgozott elméletét, két alapvetőnek tekintett tulajdonságának megtartásával:

1. A tér vákum, az éter a fény terjedésének közege nem létezik.
2. A geometrizált fizikai elmélet helytálló.

Ezt a programot akarta az általános relativitás kidolgozásával megvalósítani, amelynek lényege a differenciálgeometriában meglévő ívelemre a folytonos kovariancia transzformáció alkalmazása. Azonban ehhez szükség volt egy másik a görbült terekben érvényes geometriára, azzal a megkötéssel, hogy a speciális relativitásban alkalmazott **indefinit vonalelem** is megmaradjon, ez volt fénysebesség határsebesség-ként való megőrzésének feltétele. Amit a legvilágosabban, de nem a kellő precizitással egy jelenkori egyetemi jegyzet szerzője világít meg:

„...A lokális inerciarendszer fogalmába...mindent beleértünk...minden fizikai törvény egyformán érvényes. ezért pl.a fénysebesség a lokális inerciarendszerekben... minden irányban c . A fénysebességről az inercia rendszereken kívül semmilyen általános kijelentés sem tehető.”

([40] Hraskó Péter: BEVEZETÉS AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁS ELMÉLETBE, 52.o. Műegyetemi Kiadó, 1997)

Ha ma vizsgáljuk az *Einstein-féle általános relativitás elméletét* két lényeges csoportra oszthatjuk, az elmélet eredményeit:

1. Három konkrét fizikai jelenség: a vörösetolódás, a Merkúr perihélium elfordulás és a Nap melletti fénysugár elhajlás szinte az elmélet megszületésének pillanatában megoldott problémái. Továbbá az Univerzum vizsgálat során egy sor lényeges eredmény, és a μ mezon élettartamának növekedése.
2. Azonban a későbbiekben nem született, további fontos eredmény immár 70 éve:gravitációs hullámokat a mai napig nem mértek, továbbá a nagy egyesítés a kvantummechanikával mindmáig nem sikerült.

13.2.1. Az *Einstein-féle általános relativitás elmélet alapjai*

Einstein is később mások is a *Riemann-geometriát* tették meg az általános relativitás elmélet alapjának, amelyet azonban differenciálgeometria formájában tárgyaltak, aminek keretét később a tenzoranalízis adta. Az alábbi két feltétel posztulálásával:

1. A globális inerciális rendszer feltételezése téves, csak lokálisan léteznek.
2. A az égitestek gravitációs ereje nem létezik, hatásuk abban van, hogy a környező tér inerciális rendszereinek metrikáját módosítják.

További felhasznált megállapítások:

1. Egyidejűleg a gravitációs hullámok elméletét, keletkezését és létét intenzíven kutatják.

2. 3 dimenzióban

$$\det \mathbf{G} > 0 \quad (13.26)$$

3. 4 dimenzióban

$$\det \mathbf{\Gamma} = -c^2 \quad (13.27)$$

Ezt úgy fejezzük ki, hogy a mértéktenzor *indefinit* metrikát képvisel. A $\det \mathbf{G} > 0$ esetben ugyanis $[\mathbf{a}^2 > 0; \mathbf{a} \neq 0]$, az indefinit esetben még ez sem teljesül.

13.2.2. A görbült tér

„a.) A Riemann-tér

Az n-dimenziós Riemann -tér az n-dimenziós euklideszi tér általánosítása. Speciálisan n = 2-nél görbült felületként képzelhető el.

Az euklideszi sokaság definiáló tulajdonsága az, hogy lefedhető globális Decartes koordinátákkal. A Riemann-sokaságok definícióját azonban ... távolság fogalmára alapozzuk. A következő két tulajdonságot követeljük meg:

1. Bármely két infinitezimálisan közeli pont között meghatározott távolság van, amely méterrúddal elvben meg is mérhető.....
2. Két egymástól *teszôlegesen távoli* infinitezimális közelségû pontpár távolsága összehasonlítható egymással.

Ha a sokaságot koordináta hálózattal látjuk el, az $(x^\mu, x^\mu + dx^\mu)$ koordinátájú pontok közötti távolságot a

$$dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (5.1)$$

fundamentális kvadratikus forma határozza meg.....

A *dl* hossz *operatív* (koordinátarendszerre nem hivatkozó) *meghatározása* az, hogy méterrúd beosztásán olvassuk le.

5.2.A térszerű ívelemnégyzet.

...Arra jutottunk, hogy térszerű intervallumok is értelmezhetők operatív módon. Ez, — mint tudjuk— szükséges ahhoz, hogy a g_{ij} valóban kovariáns tenzor legyen. A meghatározásokat kronometriára és fényterjedésre kellett visszavezetnünk, ezért — úgy látszik —, hogy a pszeudoriemann geometriában az egymástól távoli infinitezimális intervallumok

összehasonlításában az ideális óra tölti be azt a szerepet, amit a Riemann geometriában az ideális méterrúd.

Az általános relativitás elméletnek, mint fizikai elméletnek eszerint van egy alapvető konzisztencia-feltétele: az ideális órák realizálhatósága valóságos órák határ-eseteként. Ez minden valószínűség szerint csak a kvantumelmélet jóvoltából lehetséges. A kvantumelmélet biztosítja ugyanis, hogy időetalont definiálhassunk anélkül, hogy metrikai követelményeket kelljen teljesítenünk: az adott fajtajú atom két meghatározott sorszámú energia nívója közötti átmenet során kibocsátott fény frekvenciája* töltheti be a frekvencia és időetalon szerepét.”

([40] Hraskó Péter: BEVEZETÉS AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁS ELMÉLETBE 56.; 62.o. Műegyetemi Kiadó, 1997.)

*Amiről a szerző ír az 5.2 pontban, az téves, mivel itt gravitációs terekről van szó, márpedig ha a gravitációs mező paramétereit bevezetjük a Schrödinger egyenletbe, az így módosított egyenlet a gravitációs mező atomokra gyakorolt hatását foglalja magába, viszont ezen atomok frekvenciái a gravitációs potenciáltól függenek. Ebből az következik, hogy az időetalon a görbült térben a helytől függ, azaz pontatlan.

A fentiek ezért úgy festenek:

1. *Riemann geometria és az általános relativitás elmélet* egyféle „skizofrén” együttese jött létre, a későbbiekben felfedezték ezt a sajátos kettőséget, amit valahogy meg kívántak menteni. (Ez a „skizofrén” jelleg elsősorban az ívelemnégyszet pozitív definit illetve indefinit mivoltában rejlik. *Einstein az indefinit meghatározáshoz ragaszkodott.*[†]).
2. A mai napig nem tudták az *általános relativitás* és a *kvantummechanika* elméletét egyesíteni, tehát a kvantummechanika nem használható a vele nem összefüggő *általános relativitás* alapjainak igazolására.
3. A matematikában szokásos infinitezimális távolság fogalom a fizikában nem létezik, nevezetesen:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \quad (13.28)$$

ahol dx az infinitezimális távolság: ami matematikailag bármilyen kicsiny lehet, míg a fizikában a legkisebb hosszúság:

$$\Delta x_{\min} = 10^{-34} \text{ cm} = \text{Plank hossz} \quad (13.29)$$

A 1.5 képletben leírt határátmenet értelmezése során alapvetően hangsúly van azon, hogy a $\Delta y / \Delta x$ hányados meredeksége a Δx minden egyes közelítése során 0 – hoz megváltozik és csak akkor válik érintővé, amikor $\Delta x \equiv 0$ válik. Tehát a határátmenet a folytonosság fogalmára épülő fogalom.

[†]Lásd későbbi idézetet Lánczos Kornéltól.

Ezek után érdemes megvizsgálni az alábbi idézet tartalmi-jelentésbeli lényegét, mivel itt jól tetten érhető *Einstein* kettős „skizofrén” értelmezése:

„.....b.) **A pszeudoriemann tér**

„Meggondolásaink *mutatis mutandis* érvényesek az általános relativitáselmélet téridejére, amely a speciális relativitáselmélet -2 szignatúrájú téridejének görbült, vagy — pontosabb kifejezéssel — *pszeudoriemann struktúrájú* általánosítása. A

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (5.4)$$

ívelemnégyzet általában nem hozható Minkowski alakra, de **a téridő bármely kiválasztott pontjához** található olyan koordinátarendszer a téridőn (lokális Minkowski koordináták), amelyben a (3.21)[‡] alapján az adott pontban $g_{ij} = \eta_{ij}$. A K' -beli koordinátabázis $e_{(i')}$ bázisvektorai (amelyek K' -ben az

$$e_{(i')}^{j'} = \delta_{i'}^{j'} \quad (5.5)$$

komponensekkel rendelkeznek) *pszeudoeuklideszi értelemben* ortonormáltak:

$$e_{(i')} \cdot e_{(j')} \equiv g_{kl} e_{(i')}^k e_{(j')}^l = \eta_{ij'} \quad P - \text{ben} \quad (13.30)$$

A pszeudoriemann ívelemnégyzet nem pozitív definit, ds^2 jelölés lehet negatív vagy nulla is....Az ívelemnégyzet előjele alapján az infinitezimálisan közeli eseménypárok** három csoportba oszthatók $ds^2 > 0$ -nál az eseménypárt *időszerűnek*, $ds^2 = 0$ *fényszerűnek*, $ds^2 < 0$ -nál pedig *térszerűnek* mondjuk.

A pszeudoriemann téridő a speciális relativitáselmélet pszeudoeuklideszi téridejének „görbült” változata, ezért az infinitezimálisan közeli esemény ívelemnégyzete párhuzamba állítható két esemény négyestávolság-négyzetével a speciális relativitás elméletben***Eszert ha a pszeudoriemann téridő két közeli pontjára $ds^2 = 0$, akkor ezek a pontok(események) összeköthetők fényjellel (1.2.fejezet). Ha $ds^2 > 0$, akkor az események történhetnek egy és ugyanazon objektumon, vagyis az időszerű eseménypár mindkét pontja rajta lehet egyetlen tömegpont világvonalán (3.2 fejezet).

....egy időszerű eseménypár ívelemnégyzetének mérése visszavezethető sajátidő meghatározásra: az ívelem annak a $d\tau$ sajátidő-különbségnek az $1/c$ -szeresével egyenlő, amelyet a két esemény pillanatában éppen az események helyén tartózkodó ideális órán olvastunk le.

...A sajátidőre történő visszavezetéssel az időszerű ds^2 -nek operatív meghatározást adtunk. A fényszerű eseménypárra ds^2 mindig nulla, ezért az ívelemnégyzet „mérése” már megtörténik, amikor megállapítjuk, hogy a pár összeköthető fényjellel. Ez is operatív jellegű meghatározás.

....”

([41] Hráskó Péter: BEVEZETÉS AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁS ELMÉLETBE 58. o. Műegyetemi Kiadó, 1997.)

**Természetesen itt a szerző téved az infinitezimálisan közeli eseménypár — eszmei fogalom — fizikailag legalábbis egy foton kisugárzását jelenti amelynek hossza sokkal, nagyobb mint az infinitezimális közeli eseménypár .Felfogása szerint a tömegpont geometriai pont, azaz kiterjedés nélküli, így a köztük lévő távolság eszmeileg zérus, például nehezen tekinthető egy $10^{-6}m$ hosszú foton, amely autentikus fényszerű eseménypár infinitezimálisnak. Sokkal inkább tekinthető időszerűnek, mivel egyetlen tömegpont, egy elektron világvonalán rajta

[‡]3.21

van. Bár az elektron sem tekinthető tömegpontnak, mivel mérete $10^{-15}m$, ami Einstein geometrizált fizikájával ahol a pont kiterjedés nélküli, nem fér össze.

***Természetesen a szerző itt is téved a speciális relativitás elméletében minden fényjellel összeköthető két pont között a távolság zérus, az Einstein féle ívelemnégyzet ugyanis az alábbi:

$$(x^2 + y^2 + z^2) - c^2t^2 = 0 \tag{13.31}$$

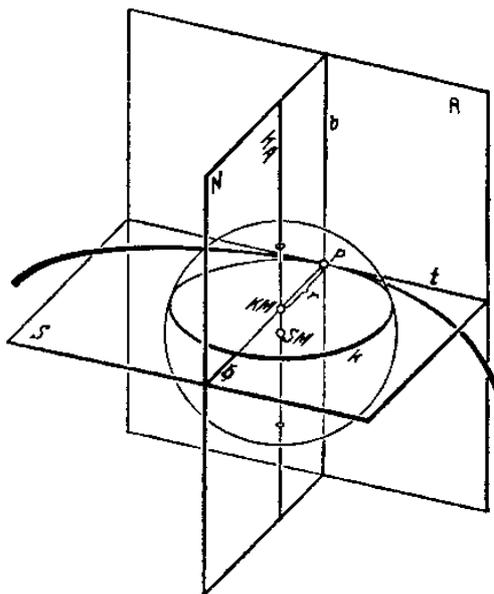
$$(dx^2 + dy^2 + dz^2) - c^2dt^2 = 0 \tag{13.32}$$

De itt is figyelembe kell venni, hogy az ívelemnégyzet $ds^2 = 0$,nem valódi zérus, hanem két nagyon is valódi mennyiség különbsége, amelyek definitíve azonos nagyságúak, melyek egyike a térben, másikuk az időben történő mérés eredménye, ez az eredmény annak a következménye, hogy Einstein két erősen különböző alapmennyiséget a távolságot és az időt, az összeadás elkerülése érdekében kétféle számmal nevezte el: a tér mértéke valós szám, mert közvetlenül kétirányban mérhető, az idő mértéke képzetes, mert egyirányban és csak áttételesen mérhető, továbbá a távolság visszafordítható (tudok rajta visszafelé menni) míg az idő csak egyirányban (a jövő felé) halad. De ez a különbségtételi követelmény felületesen történt, mert ez a két mennyiség négyzete már összevonható és közös távolság nyerhető vele. A kérdés itt az, hogy a zérus különbség egy azonos jelenség két egyidejű nagysága között kezelhető-e úgy, mint két bármilyen valódi nagyság különbségeként előálló zérus. Az első nevezhetjük pszeudozérusnak a másodikat zérusnak. Így a pszeudoriemann ds^2 =pszeudozérus, míg az infinitézimális eseménypár határértékként = zérus.

A fontos persze itt az, hogy a valódi zérust nem tudjuk mérni, míg a pszeudozérust tudjuk mérni, (bármekkora lehet a két komponense), de kettő jelentését összekeverni helytelen és félrevezető, mivel a zérus egy eszmei mennyiség azaz fogalom, a pszeudozérus pedig valós tényleges fogalom, és e kétfajta mennyiség gátlástalan behelyettesítése egymás helyére végzetes hibákhoz vezet.

A tévedést, hogy pontosan miről is van itt szó, érdemes az alábbi ábrát szemügyre venni:

- P* a görbe vizsgált pontja
- S* símulósík,
- N* normálsík,
- R* rektifikálósík,
- t* érintő
- ñ* főnormális,
- b* binormális,
- k* görbületi kör.
- r* görbületi sugár,
- KA* görbületi tengely,
- KM* görbületi közép-pont,
- SM* simulógömb közép-pont



1.ábra.Görbült térbeli vonal és paraméterei.

Valójában két dologról beszélünk az egyik az érintősík \rightarrow *Minkowski geometria*, a másik a simulógömb \rightarrow *Riemann geometria*. (Míg a **P** pontban lehetséges, hogy a vizsgált görbe és a simulógömb görbületi sugara azonos, azonban az érintősík csak egy pontban érinti a görbét.)

Az eltérés ott érhető tetten, hogy a *Riemann geometria* illetve a *ráépített elmélet egyaránt alkalmas kiinduló lehetőségeket tartalmaz a pozitív görbületű definit terek és a negatív görbületű-indefinit terek leírására*. Amennyiben megvizsgáljuk az 1. ábrát kiderül, hogy a vizsgált „g” térbeli görbének a „p” pontban van érintősíkja, amely ha a térbeli görbe görbületi sugara nem zérus akkor az érintősík csak egyetlen pontban érinti a görbét, bármilyen csekély eltérés esetén az érintősík, már nem párhuzamos az eredetivel, hanem azzal $\Delta\varepsilon$ szöveget zár be. Azonban létezik a „KM” középpontú simulógömb, amely a másodrendű deriváltak következtében nem infinitézimálisan, hanem véges nagyságú vonalon érintkezik a „g” görbével, amennyiben a térbeli görbén magasabbrendű deriváltjai léteznek akkor a simulógömb véges hosszon érinti a térbeli görbét, vagy ha a a térbeli görbe egy görbe felületen helyezkedik el, azt jól közelítheti meg.

A simulógömb a Riemann geometria felhasználását jelenti, melynek signatúrája (+ + + +) míg az érintősík a maga merev koordinátaival pszeudoeuklideszigeometria, amelyen létrehozható a Minkowski signatura (+ + + -) a kettő azonos lehet egy geometriai pontban, de nem lehet egyenlő a véges ∂s ívelemben semmikor.

Itt érhető tetten az Einstein féle speciális relativitás átmentése, amint az az alábbiakból következik:

„.....

Az Einstein féle terek

A Riemann terek fontos alkalmazást nyernek az *általános relativitás elméletében*. A tér (pontosabban az úgynevezett téridő) fizikai tulajdonságai lényegesen meghatározzák a tér metrikáját, mely a téridő minden pontjában lokálisan (+ + + -) szignatúrájú pszeudoeuklideszi teret hoz létre.²

{ Az idézett mű szerkesztőjének megjegyzése:314. o.:

2. Tehát minden pontban az érintőtér egy pszeudoeuklideszi tér a VI.3.§ szerint, ahogy ez később következik az 1. alapfeltevésben.[§]}

:

...A téregyenlet levezetésekor Einstein a következő alapfeltevésekből indult ki:

1. A gravitáció jelenlétében a téridő geometriája olyan Riemann-geometria, ahol a tér minden x pontjában a $(g_{\alpha\beta})$ nem elfajuló mátrix és elemei lineáris transzformációval a következő alakra hozhatók: $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = +1$, a többi $g_{\alpha\beta} = 0....$ ”

([42] I. P. Jegorov: Geometria, 235.o. Tankönyvkiadó, Budapest,1986)

Itt derül ki *Einstein* tévedése, ugyanis a pszeudoeuklidesz tér, az nem a gravitációs-gyorsulási tér, hanem a görbült tér, melyben tömegek haladnak, a kitüntetett görbéken: **geodetikusokon**. Ehhez a haladó tömegponthoz (lásd 1. ábra) csatolhatók érintő egyeneseknek és síkjainak tere, ami a sebesség térnek felel meg, azaz

[§]A pszeudoeuklideszi geometria, nem Riemann geometria, hanem Bolyai-Lobacsevskij geometria, amely nem gömb alakú, hanem $r = -1$ képzetes sugarú álgömb.

a gravitációs tér helyett a sebességtérre vonatkozik az általános relativitás elmélete, vagy pontosabban az impulzus térre, ami a valóságban az univerzumban mozgó barionos anyag mozgását írja le. Itt tényleg teljesül *Einstein* posztulátuma, hogy elméletében az erő és a gyorsulás nem létezik. Mindezek alapján az **Einstein féle elmélet nem a gravitáció, hanem a benne mozgó barionos tömegek sebességeinek elmélete.**

Egyidejűleg tudomásul kell venni azt is, *Riemann kicsi méreteiben nem a Minkowski-féle, hanem az Euklidesz-féle geometriával azonosította geometriáját.* De ennél is lényegesebb, hogy *Einstein* geometrizálta a gravitációs teret, ami azzal jár, hogy két geometriai pont, geometriai értelemben volt pont, azaz kiterjedés nélküli objektum, amelyek között nincs távolság (lásd Minkowski-téridő geometriát, ahol két pont közötti távolság 0 és ∞ között bármekkora lehet) ennek következtében a differenciálgeometria nem használható. Tudomásul kell venni, hogy a gravitáció elmélete nem geometriai elmélet, hanem fizikai, amely ismeri a legkisebb távolság fogalmát a *Plank hosszt* $= 2 \times 10^{-34} \text{ cm}$. Továbbá el kell gondolkozni azon, hogy a téridő metrikája milyen módon változik meg, ha a „téridő kontinuum” nem más mint teljesen, egészen az elméleti elképzelésig üres: **nincs benne semmi. Ha nincs benne semmi akkor mi módosul? csak egyetlen dolog módosulhat az a magányos tömegpont által gerjesztett gravitációs potenciál illetve a gravitációs térerő, amiket gömbfelületek és sugárirányú egyenesek ábrázolnak kitöltve az egész teret.** Tehát ebben a térben a metrika a gravitáció által kitöltött tér metrikája, amit a tömeg és az impulzussűrűség szab meg, és a jelzett egyetlen tömegpont realizál.

Az alapvető probléma tehát a következő volt, hogyan lehet a pontokkénti téridő által meghatározott metrikát, a mellette lévő pontban annak „eltérő térdeje” miatt eltérő metrikáját egymással invariánsá tenni, és így az invarianciát nagyobb véges tartományokra kiterjeszteni

„....Egy gravitációs mezőben szabadon eső megfigyelő közvetlen környezetében a megfigyelő számára nem létezik gravitációs mező. A téridő-kontinuumnak egy végtelen kis tartományát tehát mindig Galilei-féle tartománynak tekinthetjük. Az ilyen végtelen kis tartományhoz hozzátartozik egy inerciarendszer (X^1, X^2, X^3 térbeli és az X^4 időbeli koordinátával), amelyhez viszonyítva a speciális relativitáselmélet törvényeit érvényesnek tekinthetjük.”

Ez a mozgás leírása merev, inercia koordinátarendszerre, azaz a tehetetlenség és mozgásformájának megfogalmazása, egy téridőbeli pontra:

$$(ds)^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 - (dX^4)^2 \quad (13.33)$$

amely ha \mathbf{ds} -t vektornak tekintjük, akkor a fenti ívelemnégyzet a vektor abszolút értékének négyzete:

$$|\mathbf{ds}|_E^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 - (dX^4)^2 \quad (13.34)$$

illetve ez a mozgás leírása általános koordinátákban, azaz görbevonali gravitáció és mozgásformájának megfogalmazása, ugyanarra a téridőbeli pontra:

$$(ds)^2 = g_{rs} dx^r dx^s \quad r, s = 1, 2, 3, 4 \quad (13.35)$$

míg az általános koordinátákban ugyanez a vektor \mathbf{ds}^2 reális (valós) része, ami nem más mint a vektor divergenciája, azaz az adott téridőponttól ds távolságra lévő próbatestnek átadott energia:

$$\text{Re}(\mathbf{ds})^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 - (dX^4)^2 \quad (13.36)$$

Einsteinnek azért volt szüksége a kiválasztott pontban a speciális relativitáselmélet törvényeit érvényesnek tekinteni, mert ott már rendelkezésre állt egy transzformációs formula, amellyel lehetővé vált következő pontba a szükséges transzformációt végrehajtani. Ezt *Einstein* ki is jelenti: „**Véges kiterjedés esetén a téridő tartományai általában nem Galilei-féle tartományok, úgy hogy a gravitációs mezőt a koordináták semmilyen megválasztásával sem lehet véges tartományokra kiterjeszteni. Nincsenek tehát olyan koordináták, amelyekre véges tartományokban fennállnának a speciális relativitáselmélet metrikus viszonyai. A kontinuum két szomszédos pontjára azonban mindig fennáll a fenti „ds” invarianciája. Ezt a „ds”-t pedig bármilyen tetszőleges koordinátákban ki lehet fejezni....**”

[43] A. Einstein: Relativitätstheorie 41-42.o.

A fenti két egyenlet és a hozzá kifejtett magyarázat, amely a véges tartományokra vonatkozó gravitációs mező kiterjesztésére vonatkozik tulajdonképpen teljesen igaz, csak egészében téves. Mielőtt a megfelelő magyarázatra sor kerülne vegyük ugyanezen probléma, mai felvetését, ami az *Einstein-féle relativitás elmélet alapvető elve az ekvivalencia elv.*

13.2.3. Egyszerű magyarázat a fentiekre.

A 1.11. számú formula, amely a *Minkowski-geometria ívelemnégyzete* (abszolút értéke), természetesen csak a kijelölt pontban mint origóban lehet azonos a *Riemann-geometria ívelemnégyzetét* (abszolút értékét) *jelentő* 1.12. számú formulával, a mellette lévő pont csupán a tranzitívnak tekinthető görbék esetén lehet helyesnek tekinteni.

Azonban létezik ennél sokkal kevésbé elvont magyarázat, ismeretes, hogy mind a *Bólyai-Lobacsevszkij (pszeuodoeuklideszi)*, mind a *Riemann geometria* *kellően kis méretek esetén Euklidesz-i geometriává fajul.* Ennek következménye, hogy a 1.11. formula a négydimenziós *Euklidesz-i téridő-vektor négyzetének valós része* és egyidejűleg a *Minkowski téridő-vektor ívelemnégyzete* is. Tehát az 1.11. formula két fogalmat takar, amelyek matematikailag egyenlők.

Kérdés az, hogy melyik formula adja a megfelelő megoldást:

A választ az szabja meg, hogy kicsi→nagy viszonyt melyik fogalom elégíti ki? A *Minkowski-féle geometria is kicsiben Euklidesz-i.* Viszont, ha a téridő kijelölt pontja illetve a rajta fekvő infinitezimális *Minkowski ívelemet* nincs mód megnövelni véges téridő tartományra, míg az *Euklidesz-i infinitezimális ívelemet*, ami ugyancsak a téridő kijelölt pontján fekvő vektor, négyzetének valós része minden további nélkül megnövelhető és ekkor *Riemann geometria ívelemét* kapjuk. *Ami az eredeti cél is volt. Tehát azt mondhatjuk, hogy Einsteint ragaszkodása a*

Minkowski geometriához tévutra vitte és az általa ekvivalencia elvnek nevezett alapelv rossz és szükségtelen.

Azonban mivel a gravitációról volt szó szükséges volt, előtte a pontra nézve érvényes tehetetlenség és gravitáció egyenértékűségét definiálni legalábbis egy pontra vonatkoztatva posztulálni. Igaz, hogy többféle módon is megpróbálták a pontról a vonalra vagy felületre való átmenetet egzaktá tenni: ez az egzaktá tétel valójában a következő közös gondolati alapokon nyugodott:

1. **A gyorsuló mozgás egy igen kis időtartama egyenletes mozgásnak tekinthető, ez egy fizikai tény, amely független minden koordináta rendszertől.** Ez a gondolati alap azonban téves, mert az igen kis időtartam valójában, meghatározatlan fogalom, függ ugyanis az időtartam fogalom konkrét nagyságától, illetve a megkívánt eredmény pontossági igényétől, amíg ezt nem konkrétizálom, addig az előző kijelentés üres és tartalmatlan.
2. Ugyanígy üres és tartalmatlan *Einsteinnek* a szabadon eső megfigyelőről mondott mezőmentes Galilei tartománynak tekinthető végtelen kis tartományról tett kijelentése, mivel ott két azonos nagyságú és ellentétes irányú gyorsulás közös, de eredőként semlegesítődő hatásáról van szó, de mindkét fizikai hatás valós és létező. Ezért az nem **üres tér** csupán **semleges tér**, a kettő között pedig végtelen különbség van.

A gravitáció ekvipotenciális felületeit mivel azok körök-gömbök legkönnyebben a Riemann geometria gömbi közelítésével lehet leírni és akkor nincs probléma a véges felületekre való kiterjesztéssel.

Az általános relativitás elméletével kapcsolatban a fentebb említett meglehetősen széles körben elterjedt nézet — különösen a tudományos ismeretterjesztésben —, hogy az általános relativitás elmélete *Riemann geometrián* alapul, ez nem tévhit, maga *Einstein is* így vélekedett, amikor megszületett az elmélete. Ugyan ma már kezdenek különbséget tenni a differenciálgeometriai tárgyalás során, az *Einstein-féle* téridő és az egyéb téridők között, (például a *Hawkins-féle* téridő), de ez a különbségtétel korántsem olyan határozott, mint lennie kellene. Többnyire megpróbálnak például a *pszeudoriemani geometria; semi-riemani* megnevezéssel — kitérni a tényleges helyzet feltárásától —, ami valójában a *hamisriemani; álriemani illetve félriemani geometriát* jelenti, ami sokkal lényegesebb problémákat takar.

Idetartozik: Az 1930-as évek első felében körülbelül 4-5 éven át közvetlen munkatársa volt *Lánczos Kornél* aki 1972-ben Magyarországon a következőképp emlékezett vissza *Einsten akkori véleményére:*

„...Mindig bámultam azon, hogy egy ilyen látszólagos abszurditást milyen könnyedén tudtak lenyelni a fizikusok és a matematikusok. Erről sokat vitatkoztam Einsteinnel. Ő kétségkívül érezte, hogy ezen minuszjel mögött valami nagy titoknak kell rejtőznie. De hát abból, hogy a Lorentz transzformáció mindenütt olyan jól beválik, arra kell következtetni, hogy ez a sajátos távolság kifejezés tényleg megvalósul a természetben. Geometriai szempontból kétségkívül abszurditással állunk szemben. Ez azonban Einsteint nem nagyon bántotta. Ő úgy gondolkodott, hogy a geometria vagy a fizika csak általunk felállított kategóriák. Miért kellene annak, amit

q világrend geometriájának nevezünk, feltétlenül összeesni a mi szokásos geometriai felfogásunkkal? Őneki a Riemann-féle görbületes tenzorban az imponált, hogy általánosan kovariáns volt, vagyis minden koordináta-rendszerben lehetett használni. Ebből a szempontból a definit vagy indefinit vonalelem egy forma jelentőségű volt. De ha arra gondolunk, hogy a *Gauss-Riemann féle geometria differenciálgeometria* volt, vagyis arra volt felépítve, hogy egy pont *szomszédságát* mérjük ki, akkor mindjárt jelentkezik az indefinit vonalelem paradox tulajdonsága. Itt tudniillik nem lehet „szomszédság”-ról beszélni. Egy valódi Riemann geometriában „nulla távolság” azt jelenti, hogy két pont összeesik. A Minkowski-féle geometriában nulla távolság lehet két pont között, amelyek millió kilométerre vannak egymástól.

.....A másik komoly árnyéka következő. Ha már ilyen hatalmas perspektíva nyílik meg előttünk a görbületes geometria bevezetésével, ami megengedi, hogy az összes anyagi tulajdonságokat mint a tér különleges görbületes tulajdonságait értelmezzük, akkor miért van, hogy csak a *gravitációt* tudjuk ezen rendkívül komplikált egyenletekből levezetni, de mind az elektromos mind a kvantum megnyilvánulások kívül maradnak a fénykörön? Ha már ilyen óriási perspektíva nyílik meg, amely megengedi, hogy egy ilyen kiterjedt jelenségcsoport tisztára az idő-tér halmaz geometriai megnyilvánulásának tekintsük, miért sikerült ez éppen a gravitáció esetében és nem a többi fizikai jelenség esetében? Einstein az élete utolsó 30 évében ezen probléma megfejtésére szentelte, de sikertelenül.....”

Lánczos Kornél az idézett előadásában a kérdést részben megválaszolta:

*A válasz lényege az, hogy feltételezzük azt a tényt, hogy a *Minkowski féle térről feltételezzük, hogy sima*. Ez egyébként a lényege is egyben. Lánczos Kornél viszont azzal a feltételezéssel élt, hogy nem az, és legalábbis inverzív hullámmás jellemzi, ebből kiindulva az átlagos görbületes sugár nem tűnik el, mint *Einstein gravitációja* esetén, hanem igen nagy lesz. Ebből arra következtetésre jut, hogy a *Minkowski féle együthetők* $= 1, 1, 1, -1$ nem léteznek és az *Einstein-féle gömbszimmetrikus megoldások helyett periódikus megoldásokat alkalmazva a tér-idő koontinuum kristályos struktúrájává válna, és csak látszólag lenne izotrópikus a kicsiny rácsállandó miatt* ($r = 10^{32} \text{cm}$). Ez az *Einstein-féle gravitációs egyenletekben a lineáris rész helyett a kvadrátikus rész válik dominánsá és a metrika látszólagos metrikaként $1; 1; 1; -3$ metrikává válik. Egyidejűleg az általános kovariancia érvényét veszti, és a metrikus gyenge változása $\boxed{\gamma_{ik}}$ melynek feltételei:*

$$\text{Skaláris: } \boxed{\gamma_{ik} \eta^{ik} = 0}$$

$$\text{Vektoriális: } \boxed{\gamma}$$

$$\gamma_{ik} = \varphi_{ik} + \varphi_{ki} \quad (13.37)$$

ahol φ_i egy egészen szabad vektor, de ha az általános kovariancia nem érvényesül akkor nem szabad vektor, hanem a vektoriális feltétel, megfelel a hullámegyenletnek, a skaláris feltétel pedig a Lorentz-féle feltételnek, ami nem más mint az elektromos vektorpotenciál. És mindez a pozitív definit metrika eredménye.

([44] Lánzos Kornél: Einstein és a jövő.161.o. Fizika Szemle 1974. június.A*.gal jelzett rész a szerző rövidítése.)

13.2.4. Az általános relativitás elmélet keletkezése.

Az általános relativitás elmélete nem pusztán Einstein műve: többdimenziós pozitív definit Riemann féle geometria eredménye. Több neves fizikus is dolgozott rajta és köztük sokszor heves viták és bírálatok vitték előre az elmélet megszületését:

Poincare; Minkowski; Lorentz és de Sitter ;Jaumann; Ehrenfest; Pick; Abraham I.; Mie; Nordström I.; Einstein és Grossmann; Mach; Nordström II; Hilbert .

Végül is Einstein és Grossmann elmélete vált általánosan elismertté bár Hilbert gyakorlatilag ugyanarra az eredményre jutott:

Itt most néhány idézet következik az *einsteini általános relativitás fejlődéstörténetéből*: ezek célja az, hogy bemutassa, *Einstein eltért a Riemann geometriától és felhasználva annak széleskörű alkalmazhatóságát, olyan önálló elméletet alkotson, ami átmenti a számára becses speciális relativitás elméletet és mind a mai napig nem sikerült a fizika többi ágával különösen a kvantummechanikával egyesíteni.* Einstein 1908-tól több formában is foglalkozott a gravitációval, de újra meg újra:

„...Matematikailag kifejezve ez azt jelenti, hogy a fizikai (négydimenziós) térnek Riemann metrikája van. E metrika időszerű extrémális vonalai adják azon anyagi pont mozgástörvényét, amelyre a gravitációs erőn kívül erő nem hat. E metrika ($g_{\mu\nu}$) együtthatói a kiválasztott koordinátarendszerre vonatkoztatva egyúttal a gravitációs teret is leírják. Ezzel az ekvivalenciaelv természetes megfogalmazására talált, amelynek tetszőleges gravitációs térre való kiterjesztése teljesen természetes föltevést jelentett.

...Ez 1908-ban történt (az ekvivalencia elv felfedezése: a szerző). Miért kellett további 7 év az általános relativitás elmélet felállításához? Ennek fő oka az volt, hogy az ember nem egykönnyen szabadul meg attól a nézettől, hogy a koordinátáknak közvetlen metrikus jelentést kell tulajdonítani..... Ha mármost le kell mondanunk róla, hogy a koordinátáknak közvetlen metrikus jelentést tulajdonítsunk (a koordinátakülönbség = mérhető hossz illetve idő), akkor azt sem kerülhetjük el, hogy ne tekintsük egyenértékűnek a folytonos koordináta transzformációval előállítható valamennyi koordináta rendszert.

....A fönti dilemma megoldása a következő volt: nem „s” koordináta különbségeknek kell fizikai jelentést tulajdonítanunk, hanem a hozzájuk rendelt Riemann metrikának. Ezzel létrejött az általános relativitáselmélet alapja. De még meg kellett oldani két problémát:

1. Ha egy erőtvény a speciális relativitáselmélet kifejezőmódja szerint van megadva, hogy kell ugyanezt Riemann-metrikájú térre átvinni.
2. Hogyan szólnak azok a differenciális törvények, amelyek magát a Riemann-metrikát azaz a $g_{\mu\nu}$ -ket meghatározzák?

...E kérdéseken dolgoztam 1912-től 1914-ig barátommal, Marcel Grossmannal. Azt találtuk,[¶] hogy a probléma megoldásának matematikai módszere Ricci és Levi-Civita infinitezimalis differenciálszámításában már készen áll.

[¶]Lásd ZÁRSZ I.

...Ami a 2. problémát illeti, megoldásához nyilvánvalóan $g_{\mu\nu}$ -kre vonatkozó másodrendű invariáns differencialakokra volt szükség. Nemsokára megtudtuk, hogy ezeket Riemann már fölállította (görbületi tenzor). Az általános relativitáselmélet közzététele előtt két évvel már számításba vettük a helyes téregyenleteket, de képtelenek voltunk belátni fizikai használhatóságukat. Éppen ellenkezőleg, azt hittem, hogy nem tudják kellően kibírni a tapasztalatot. Sőt még azt is hittem, hogy általános megfontolással sikerült kimutatnom, hogy a tetszőleges koordinátatranszformációval szemben invariáns gravitációs törvény összeegyeztethetetlen az okság elvével.

Ezek olyan gondolkodásbeli hibák voltak, amelyek két évi szerfölött kemény munkát jelenetettek, míg végre 1915 végére hibásnak ismertem fel őket, s a csillagászati megfigyelés tényeihez való kapcsolódást megtaláltam; ezután bűnbánóan visszatértem a Riemann-görbülethez.”

([45] A. Einstein: Válogatott tanulmányok 263-264 o. Gondolat, Budapest, 1971)

„.....1912-ben meghívtak a zürichi Polytecikumra, már jóval közelebb jutottam a probléma megoldásához. Fontosnak bizonyult itt a speciális relativitáselmélet formális alapjainak Hermann Minkowski által elvégzett elemzése Az ekvivalenciaelv arra ösztönöz bennünket, hogy az ilyen térbe nemlineáris koordinátatranszformációkat vezessünk be... Továbbá a pszeudoeuclidési metrika a

$$ds^2 = \sum g_{ik} dx_i dx_k \quad (13.38)$$

általános alakot ölti....Ezek a g_{ik} -k ezenkívül a négy koordináta függvényei, amelyek az ekvivalenciaelv szerint, a metrikán kívül szintén leírják a « gravitációs teret ». Ez utóbbi természetesen egészen különleges, mivel transzformációval a

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 \quad (13.39)$$

speciális alakra hozható, azaz olyan alakra, amelyben a g_{ik} -k függetlenek a koordinátáktól. Ez esetben a g_{ik} -k által leírt gravitációs teret « el lehet transzformálni ». Az utóbbi speciális alakban az elszigetelt test tehetetlenségi viselkedését (időszerrű) egyenes vonal fejezi ki. Az általános esetben a « geodetikus vonal » felel meg neki.

Ezzel a gravitáció problémája tisztán matematikai problémára redukálódott: vannak-e a g_{ik} -nak olyan differenciálegyenletei, amelyek invariánsak a nem lineáris koordinátatranszformációkkal szemben ?****

.... fölkerestem 1912-ben régi egyetemi barátomat, Marcell Grossmannt....Azonnal föllekedett....Átvizsgálta a szakirodalmat. s hamarosan kiderítette, hogy a jelzett matematikai problémát már megoldották, főként Riemann, Ricci és Levi-Civita. Az egész folyamat Gauss felületgörbületi elméletéhez kapcsolódott....Riemann tette a legtöbbet. Kimutatta, hogyan lehet g_{ik} -ból másodrendű tenzorokat alkotni. Ebből meg lehetett érteni, milyeneknek is kell lenniök a gravitáció téregyenleteinek, ha megköveteljük az összes folyamatos koordinátatranszformációval szembeni invarianciát.....úgy hittem indokot találtam ellene. Ezek a kétségtelenül téves megfontolások hozták magukkal, hogy az elmélet csak 1916-ban öltött végleges alakot.”

([46] A. Einstein: Autobiographische Skizze. In: *Helle Zeit-dunkle Zeit. In memoriam Albert Einstein. 9-17.o.* Europa, Zürich, 1956.)

**** A nem lineáris transzformációkra való áttérés a pszeudoeuclidési metrikát Riemann metrikába viszi át: $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, a g_{ik} metrikus alaptenzor komponenseinek fizikai jelentése pedig a „redukálható” erőtér gravitációs potenciálja lesz, az ekvivalencia elv értelmében, így az anyagi pont tehetetlenségi

mozgásának pályája négydimenziós téridőben húzódo geodetikus (legrövidebb) görbével azonosul. A peszeudoeuklidesziről a Riemann metrikára való áttérés, a tömegvonzás és geometrizált fölfogása s a relativisztikus program egészét érintő általánosítás révén a gravitációelmélet teljesen új értelmet kap.

Einstein visszaemlékezései szerint tehát ez a gondolatrendszer, az általános relativitáselmélet alapja, Zürichbe való átköltözése körül (Grossmann-nal végzet közös munkája előtt) alakult ki benne.

„...Ezzel az általános relativitáselmélet, mint logikai építmény, végre elkészült. A relativitási posztulátum, abban a legáltalánosabb felfogásban, amely a téridő koordinátákat fizikailag tartalmatlan paraméterekké teszi, kényszerítő szükségszerűséggel teljesen meghatározott gravitációelméletre vezet, amely megmagyarázza a Merkur perihélium mozgását. Az általános relativitás posztulátuma azonban nem tud semmi olyat mondani a többi természeti folyamat lényegéről amire a speciális relativitás elmélete már ne tanított volna meg bennünket. Az e vonatkozásban a minap e helyen kifejtett véleményem hibás volt. Az abszolút differenciálszámítás révén bármely a speciális relativitáselmélet szerinti fizikai elmélet beilleszthető az általános relativitáselmélet rendszerébe, anélkül, hogy ezutóbbi az elmélet elfogadhatóságának kritériumát szolgáltatóna.”

([47] A. Einstein: Die Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 844-847.o.1915.)

13.2.5. *Ellenvetések.*

1. Az általános relativitás elmélet csillagászati ellenőrzésének helyzete

„...Összefoglalva mondhatjuk, hogy bár az általános relativitáselmélet csillagászati igazolásáról nem beszélhetünk, eddig nem merült fel olyan megfigyelés sem, amely ellentmondana neki. Így a gravitáció természetére vonatkozó eddigi legfontosabb kísérletnek még mindig Eötvös fundamentális és annak újabban Dicke által nagyobb apparátussal történt újrafelvételét kell tartanunk.

([48] Detrek László: Az általános relativitás elmélet csillagászati ellenőrzésének helyzete.

(perihéliumelfordulás; a szinképvonalak gravitációs eltolódásának csillagászati mérése; a fényeltérítés), 28-32 o. Fizikai Szemle 1964.)

„.....

1. „a (\mathbf{ds}) négyes vektort és a $(\mathbf{ds})^2$ ívelemnégyzetet a fényterjedés fizikai jelenségéhez kell kapcsolnunk, hiszen a $(\mathbf{ds})^2 = 0$ fényterjedés egyenlete. Ilyenformán a metrikus tenzor fogalmának is megkapjuk a valóságos tartalmát: *a metrikus tenzor valójában a fényterjedés metrikus paramétereinek a tenzora.*
2. ...A tehetetlenség és a gravitáció közötti egység tétele ebben a felfogásban fizikai premisszák fizikai konklúziója, amelyhez a matematikai apparátus közvetítésével juthatunk el. Ez a matematikai apparátus óriási heurisztikus értékét dokumentálja a fizikai világ megismerésében, nem pedig a fizikai világ objektív ésszerűségét és matematizáltságát. A geodetikus vonal egyenessége ebben a koncepcióban a gravitációs hatások elhanyagolhatóságának, az inerciális mozgás érvényesülésének, a fényterjedés homogenitásának — a geodetikus vonal görbessége pedig a gravitációs mező jelenlétének a fényterjedés inhomogenitásának a visszatükröződése.”

([49]Elek Tibor: Megjegyzések Albert Einstein tudományos önéletrajzához.265–278. Akadémiai Kiadó 1973.)

1. ... Általában az a vélemény, hogy a relativitás elvéből (ami az egyenesvonalú egyenletes mozgást végző inerciarendszerekre érvényes) és a fénysebesség határsebesség jellegéből le lehet vezetni az egész (ún.speciális) relativitás elméletet ideértve az infinitezimális nénydimenziós intervallumnégyzetre vonatkozó

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1)$$

Einstein-Minkowski-féle kifejezést is..Vizsgáljuk meg vajon helyes-e ez az álláspont ? A fentebb kimondott két feltevés alapján a két inerciarendszert összekapcsoló Lorentz-transzformáció valóban levezethető. De ezek a feltevések egyedül nem vezetnek az intervallumnégyzet (1) kifejezéshez, amíg egy további feltevést nem teszünk. Ez a további feltevés : a téridőmetrika függetlensége a fizikai folyamatoktól, amelyek a térben és időben lejátszódnak (a metrika „merevsége”). 1905-ben, a speciális relativitáselmélet felállítás idején **{határsebesség kimondása azért kellett, hogy a metrika merevsége ne változzon meg!}** ez a feltevés magától értetődőnek látszott, senki nem gondolta másként. Az 1916.-ban kidolgozott Einstein-féle gravitáció elméletben a merevség feltevését elejtették. Így szükséges, hogy — ha már erre a feltevésre szükség van — nyíltan ki is mondjuk. Ha a merevség feltevését elejtjük, a metrikának (1)-nél általánosabb alakjai is lehetségessé válnak, amelyek nem homogén téridőnek felelnek meg. Irjuk fel a legáltalánosabb kifejezést az intervallum négyzet számára, amelyet Einstein gravitációelmélete elfogad:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu} \quad (2)$$

Itt az időjellegű változó x_0 ; x_1 , x_2 , x_3 a térkoordináták. A $g_{\mu\nu}$ mennyiségek a metrikát (vagyis a téridő sajátos tulajdonságait) írják le., de téridő koordináták választásától is függenek. Ezek a mennyiségek — a *metrikus tenzor* elemei — kielégítik Einstein gravitációs egyenleteit, de természetesen más koordinátarendszer választását előíró egyenleteknek is alá lehetnek vetve. Ha a gravitáló testek egy Naprendszerünkhöz hasonló rendszerét tekintjük a tér a nagy testektől távol euklideszinek, maga a rendszer pedig zártnak (vagyis a külső behatásoktól elszigeteltnek) feltételezhető Ez a fontos példa meggyőzően bizonyítja, hogy a metrika merevségének feltevését nyíltan be kell vezetni az ún. „speciális” relativitáselmélet képleteinek érdekében.¶ A széles körben elterjedt véleménnyel szemben a mozgás relativitására és a fény sebességére vonatkozó feltevések erre a célra nem elégségesek. A tulajdonképpeni kérdés, hogy a metrika merev-e, csak *Einstein*-nek a gravitáció elméletében kifejtett munkássága eredményeképpen vethető fel.....a koncepciót *Einstein legnagyobb felismerésének* tekinthetjük, és egyben az ő nevét viselő gravitációelmélet felállításához vezető legfontosabb lépésnek is.

¶Ha a metrika nem merev akkor a változó metrikájú euklideszi tér→ a *Riemann tr* kerül alkalmazásra.

2. **Létezik -e az általános relativitás elve ?** A hagyományos érvelés szerint, amely Einsteintől származik, az általános relativitás elvét tetszőleges gyorsuló mozgást végző vonatkoztatási rendszerek esetére történő általánosításának tekintik. Az általános relativitás elve indokolja Einstein szerint az egyenletek általános kovarianciájának követelményét, amit viszont az általa kiépített gravitációelmélet tulajdonképpeni megalapozásának és jellegzetes vonásának tekintettek. És ez az érvelés, Einsteint gravitációelmélete számára az „általános relativitáselmélet” elnevezés elfogadásához vezetett. Ez az érvelés azonban téves. Először is a (gyorsuló mozgást végző laboratórium értelmében vett), gyorsuló vonatkoztatási rendszer fogalma nem enged meg pontatlan definíciót: a merev test modellje ebben az esetben alkalmazhatatlan, mert minden test, amikor felgyorsul rugalmas tulajdonságaitól függő deformációkat szenved. Mármost bármilyen kísérlet , hogy ezt a körülményt figyelembe vegyük, közvetlenül mutatja, hogy a gyorsuló mozgást végző laboratórium *általános* fogalmát nem lehet bevezetni — az egyenesvonalú egyenletes mozgást végző laboratórium fogalmával ellentétben.**..... **a természettörvények nem szükségképpen differenciálegyenlet alakúak,** (amelyekre a kovariancia fogalma alkalmazható), és még azokban az esetekben is, amikor a fizikai folyamatokat a differenciálegyenletek, mint téregyenletek szabályozzák, a folyamatokat nem egyedül ezek az egyenletek határozzák meg, hanem kezdeti és határfeltételek és más kikötések is.A téregyenletek alakjának megőrzését azok kovarianciája biztosítja, amit elérhetünk, ha a metrikus tenzort is felvesszük a térmennyiségek sorába. A kezdeti és határfeltételek viszont nem kovariánsak s ha különböző koordináta—rendszerekben azonos alakjuk van, akkor a fizikai tartalom nem ugyanaz. ez azt mutatja, hogy az „általános relativitás elve” nem állhat fenn.**Általános esetben lehetetlen elérni, hogy két fizikai folyamat ugyanúgy menjen végbe(.....) két koordináta rendszerben, amelyek egymáshoz képest gyorsuló mozgást végző vonatkoztatási rendszert képviselnek.** (és ezt hogyan mérik?)^{††}....ez azt mutatja, hogy az „általános relativitás elve” nem állhat fenn. (például a súlyokkal hajtott óra nem működne műholdon)..nem szükséges elfogadni az általános relativitás elvét ahhoz, hogy Einstein gravitáció elméletét megfogalmazzuk. Ennek az elvnek minden logikai következményéhez csak a differenciális téregyenletek kovarianciája szükséges....Ez nem fizikai elv...hanem logikai követelmény...: A természettörvények egy vonatkoztatási rendszerben való megfogalmazásának konzisztensnek kell lennie bármely más vonatkoztatási rendszerbenadott megfogalmazásával, mindkét megfogalmazás egyenértékű kell, hogy legyen.(Egyszerűen azért, mert ugyanazt a fizikai jelenséget írja le. A szerző.) Ez különösen fontos azokban az esetekben, amikor a koordináta-rendszert nem lehet előre megválasztani.(Ennek egyik lényeges és alapvető fontosságú és alapvető esete, a valódi űrrepülés intra és extragalaktikus térben sokszoros fénysebességgel.A szerző.).... A tényt, hogy az általános kovariancia nem fizikai elv már 1918-ban is megmutatták Einsteinnek, aki ezt nem fogadta el.(Rövidítés tőlem: a szerző.)
3. A fizikai relativitás elv végső eredete minden esetben a tér homogenitása: akár az egész téridő kontinuum homogenitása, akár térnek a gravitáló testektől nagy távolságban vagy az infinitézimálisan kicsiben mutatott homogenitása. Ein-

**Ilyen viszont az Univerzumban sehol nem létezik.(A szerző)

^{††}A szerző.

stein gravitáció elméletében a Riemann geometria érvényességét feltételezik, a téridő mint egész, eszerint nem tekinthető homogénnek, a szokásos relativitás alapfeltevésével ellentétben. Ezért a gravitációelmélet megszorítja (vagy elveti) a fizikai relativitás elvet, és semmi esetre sem általánosítja azt. (Gondoljuk meg a téridő infinitézimálisan sugárzással és nagysebességű részecskékkel van tele lásd a 3.1 pontbeli idézetet, míg makroméreteknél égitestekkel van tele, ami bizony minden csak nem homogenitás. A szerző.) Ez a tény szembeeszköz ellentmondásban van -a geometrizált Einsteini téridővel- az Einstein-féle gravitációelmélet „általános relativitás elméletként” tötönő széles körben elterjedt értelmezésével...” [Söt ezen fejezet 1.1.1. alfejezetének 1,2,3 pontjainak definitív posztulátumaival, is amelyet mint az általános relativitáselmélet egyértelmű tudományos fizikai alapját rögzítenek].

4. **Ekvivalencia elve.** „A Newton-féle mozgásegyenletek szerint az egyenletesen gyorsuló vonatkoztatási rendszer használatata (lásd: az Enstein-féle lift széleskörűen tárgyalt példa) egyenértékű egy homogén gravitációs tér bevezetésével. Ez a felismerés szolgált Einstein érvelésének kindulópontjául , és vezette őt a gravitációelmülethez. Valóban:
5. ...a tehetetlenség és a gravitáció ekvivalenciájának posztulátumáról van szó(...), de csak infinitézimális gravitációs mezőre vonatkozóan. Einstein azonban ezt a posztulátumot véges kiterjedésű tartományokra is ki akarja mondani. A végtelen kis tartományok és a véges tartományok közti logikai ugrást így fogalmazza meg:

$$(ds)^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 - (dX^4)^2 \quad (13.40)$$

$$(ds)^2 = g_{rs} dx^r dx^s \quad r, s = 1, 2, 3, 4 \quad (13.41)$$

- „Véges kiterjedés esetén a téridő tartományai általában nem Galilei-féle tartományok, úgy, hogy a gravitációs mezőt a koordináták semmilyen megválasztásával sem lehet véges tartományokra kiterjeszteni. Nincsenek tehát olyan koordináták, amelyekre véges tartományokban fennállnának a speciális relativitáselmélet metrikus viszonyai. A kontinuum két szomszédos pontjára azonban mindig fennáll a fenti ds invarianciája. Ezt a ds -t pedig bármilyen tetszőleges koordinátákban ki lehet fejezni.” A. Einstein.

(Ez a pont a benne lévő *Einstein idézettel együtt*: [50] Elek Tibor: Megjegyzések Albert Einstein tudományos önéletrajzához 265;278 Akadémiai Kiadó 1973.)

- Kétségkívül van lokális egyenértékűség a gyorsulás és a gravitáció között. Ez abban jut kifejezésre, hogy a tér egy elhatárolt tartományában a gravitációs erőteret egy gyorsulási erőter kikompelzálhatja(pl. súlytalanság állapota a szputnyik belsejében). De ez lokális egyenértékűség nem vonja maga után a gyorsulás és a gravitációs erőter egész térre kiterjesztett teljes egyenértékűségét vagy megkülönböztethetetlenségét. Ha ilyenfajta teljes egyenértékűség létezne, lehetővé válna, hogy tetszőleges tértartományban tisztán kinematikai eszközökkel tetszőleges gravitációs erőteret hozunk létre.....Valójában azonban nem lehet kinematikai eszközökkel tetszőleges gravitációs erőteret létrehozni és Eistein gravitációelmülete sem kinematikus..... Az ekvivalenciaelv és az egész Einstein-elmélet másrészt

azt mutatja, hogy ezt az elvet más is korlátozza. Csak gyenge és homogén erőkterekre és lassú mozgásokra érvényes, nem alkalmazható olyan jelenségekre, mint pl, egy nagy tömeg mellett elhaladó fénysugár eltérülése.

– ...Általános relativitás elve nem létezik az ekvivalenciaelv szigorúan lokális. Einstein gravitációelméletének nem ezek képezik az alapját. Hanem:

- * ...**A tér és az idő egyesítése egyetlen négydimenziós kontinuummá, amelynek metrikája indefinit.**
- * ..**az a feltevés , hogy a fizikai folyamatok befolyásolják a metrikát és ezen az alapon annak megállapítása, hogy a metrika és a gravitáció egységet alkot.**”

([51] V.Fock.:A relativitás és az ekvivalencia elve Einstein gravitációelméletében, Fizikai Szemle 1964.évfolyam 12.o. Budapest. A közbevetett idézetek az adott helyen megjelölt szerzőkkel és címekkel.)

V.Fock-nak gyakorlatilag az egész hosszú cikkében igaz van, azonban a végkövetkeztetése téves:

Az **indefinit metrika**, valójában nem az, mert csak formailag igaz, de tartalmában nem, a metrika formája megegyezik az *Euklidesz-féle kvaternió négydimenziós négyzetvektorának valós részével*. Kérdés mit jelent a négydimenziós négyzetvektor valós része fizikailag: nem más mint a vektor divergenciája vagy skalárszorzata. Ez a szorzat egy forrás teljesítménye, amelynek közeli vagy távoli tömeg a forrása, ez az energia természetesen nem más mint a tehetetlenségi erő által létrehozott teljesítmény. Ez azért lehetséges, mert a téridőbeli tömegeket, mint az nagyon jól ismert elektromos erőhatások tartják egyben, ennél fogva a gravitációs erőhatásokhoz és teljesítményekhez képest az elektromos teljesítmény és a tömegekben koncentrált óriási energiátöbblet ami nagyságrendben minimum 10^{44} -szerese vagy még nagyobb, végtelen időig fenn tudják tartani gravitációsan divergens képességüket, azon túlmenően, hogy valójában minden gravitációs energia valamely másik tömegben nyelődik el és ily módon, csak az „üres térben” lévő energia tekinthető szabadnak.

Mindez azt jelenti, hogy sem *Einstein* mások nem jártak helyes úton, a gravitáció ugyanúgy egy energiaforma — semmiképp sem elektromos — mint a többi, csak mindig a tömegeket vonzó formában jelenik meg és ezért némiképp rejtélyes és a lényegileg csak a tulajdonságait ismerjük. Ami a felépülését illeti pontosan a metrika természetesen indefinit, de ez a metrika a **gravitációs erővonalak pályáját** írja le és jellemzi, és ez a metrika egyidejűleg furcsán indefinit, mivel ha nem pontosan -infinitézimálisan- hanem van valós hossza *Riemann-metrika (++++) típusú és nem lehet igazán sem nulla sem negatív értéke*, amint azt a tankönyvek leírják, másrészt alapvetően különbözik a *Minkowski metrikától, mert nem merev, alapvetően görbült, de itt óriási méretek vannak és a csillagászati megfigyelések szerint a nagy távolságokon inkább Euklideszinek tekinthető, ami merev metrikát jelent*. Természetesen ekkor két fontos dolog van: *Riemann-féle metrika, ha tömeg van közel és görbült a tér, akkor definit mivoltát itt a nagy tömeg által kibocsátott energia adja. Ennek indefinit/definit pontmetrikának van még egy következménye, mivel térkomponense nagyobb, mint az időkomponense:*

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \geq c^2(\Delta t)^2 \quad (13.42)$$

$$\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{2(\Delta t)^2} \geq c_{feny}^2 \quad (13.43)$$

Ebből egészen egyértelműen következik, hogy a gravitáció pontszerű sebessége nagyobb mint a fénysebesség. Ez pedig azonnal magyarázatot ad arra, hogy az elektronikus eszközökkel miért nem sikerült mindmáig valódi méréseket végezni. A gravitációs jelenségek elszöknek eszközeink elől.

Ismeretes, hogy a Riemann-féle terekben 3 féle geodetikus létezik, a térszerű, az időszerű és a fényszerű. Ha igaza lenne *Einsteinnek* és a gravitációs hullám fénysebességgel haladna akkor az a fényszerű geodetikuson haladna és a mérése az indikátorok érzékenységének fokozásával megoldható lenne, de ez nem sikerült. Így a gravitációs hullám a térszerű komponense a térszerű geodetikuson, míg az időszerű része az időszerű geodetikuson halad, mivel az időszerű geodetikus a leghosszabb, ezért az indikáció helyén, két eltérő komponens találkozik. Ezért a gravitációs hullám nem elektromágneses típusú, hanem soliton típusú hullám, melynek a homlokélet és a hátsó élet más-más komponens hozza létre, így az indikáció szokásos módszerei, nem alkalmazhatók. Tehát az indikáció módosítása, új módszere tenné lehetővé az érzékelést. Természetesen ez vonatkozik a legutóbbi *Formalon-Kopejkin féle mérés*re is, mivel ők egy kvazár elektromágneses jeleinek modulációját mérték és moduláció semmiképp nem lehet gyorsabb, mint a fény csoportsebessége az esetleges gyorsabb hatás kiintegrálódik a jel további (Jupiter-Föld) közti terjedés során. (Bővebben lásd a fejezet végén.)

13.3. Metrikus sík és a geometriák

Az eddigi két részben tárgyaltuk, a három ismert geometriát, amelyek *Einstein* speciális relativitás elméletének, különféle formáit szolgáltatták:

- (a) *Galilei geometria, az Einstein-féle kritika célpontja és alapja*
- (b) *Euklidesz geometria a köznapi-antropikus geometria alapja*
- (c) *Mikowski geometria az Einstein féle speciális relativitás elmélet alapja.*

Jellemzésül a periodikus mozgásokat érdemes figyelembe venni:

- (a) *Galilei geometria: parabolák*
- (b) *Euklidesz geometria: körök*
- (c) *Mikowski geometria: hiperbolák*

A fenti geometriák azonban, csak a nemlétező gravitációmentes-görbültségmentes üres térben léteznek, amelyek azonban kielégítik az antropikus-emberi méretű– fellépő geometriai igényeket. Míg a fizikának és később az embereknek szüksége van, illetve lesz az extra és intragalaktikus gravitációs görbült terekben is működő geometriára, ezt **RIEMANN alapozta meg az abszolút geometriai megalapozással, az elliptikus geometria létrehozásával, amely belső görbülettel rendelkezik s így általánosan görbült terek leírására alkalmas.**^{‡‡}

^{‡‡}Az abszolút geometria megfogalmazás többféleképp is használják....

A merev metrikus geometriák axiómái összesen **négy definiált fogalomból** indulnak ki, amelyek közül az első három a pont és az egyenes alapvető tulajdonságait rögzíti, míg a negyedik az igen fontos **metrikus sík** fogalmát adja meg három pontban, nevezetesen:

1. Létezik legalább egy egyenes. Minden egyenessel legalább három pont esik össze. Minden két különböző **A** és **B** ponthoz pontosan egy $g(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ egyenes tartozik, amelyen mindkét pont rajta van.
2. Ha **a** merőleges **b**-re. akkor létezik egy pont. amely mindkét egyenesen rajta van. Minden ponton keresztül minden egyeneshez létezik egy merőleges egyenes és ha a pont rajta van az egyenesen. akkor csak egy.
3. Minden egyenesen létezik legalább egy tükrözés. Három egyenesen való három tükrözés kompozíciója, amelyeknek egy pontja vagy merőleges egyenes közös, egy egyenesen való tükrözés.

		Érvényes axióma						A sík megnevezése
R	$\neg R$	V	$\neg V$	P	$\neg P$	H	$\neg H$	
○								metrikus euklideszi
	○							metrikus nemeuklideszi
○		○						euklideszi
○			○					szemi-euklideszi
	○	○		○				elliptikus
	○	○			○			szemi-elliptikus
	○		○			○		hiperbolikus
	○		○				○	szemi-hiperbolikus

Megjegyzések:
 C P-ből következik $\neg R$ és V. $\neg V$ -ből és H-ből $\neg R$ következik. $\neg H$ -ből $\neg V$ következik.

Metrikus síkok osztályozása

1.ábra. Táblázat: metrikus síkok.

([52]Fritz Reinhardt-Heinrich Soeder: Atlasz Matematika 136 oldal/C, Atheneum Kiadó 1999)

Az előző három megfogalmazásból levezethető tételeket abszolút geometriának nevezzük, ezekhez két megjegyzés tartozik:

1. A geometria más felépítésénél a tükrözés és mozgás központi fogalma helyébe a kongruencia fogalma lép. A mozgásgeometriának az az előnye, hogy a mozgáscsoport segítségével a geometriai tulajdonságokat különösen egyszerűen lehet algebrailag megfogalmazni.
2. A fenti definíciók kiterjesztésével metrikus síkok helyett nagyobb dimenzió számú metrikus tereket is lehet definiálni.

13.4. AZ ABSZOLÚT GEOMETRIA.

13.4.1. Általánosan

Abszolút geometrián a metrikus sík 3 pontjának további 1-5 pontban összefoglalt és megkövetelt tételeivel, 6-7 definíciójával és további 5-11. tételével kapjuk Riemann nyomán az abszolút geometriák sokaságát.

13.4.2. Konkrétan

Feltűnő, hogy korábbi a széleskörű vizsgálódásban, a negyedik kúpszelet *AZ ELLIP-SZIS* egyáltalán nem szerepel, igaz az elliptikus szögfüggvények és forgatások, bonyolultsága, messze meghaladja az előző háromét. Az elliptikus *RIEMANN geometriát*, annak ellenére, hogy már az ókorban is irtmerték más formában, valójában csak **BERNHARD RIEMANN 1854. ben tartott doktori értekezésében, amit DEDEKIND nevű barátja adott ki 1868-ban: „Über die Hypothesen welche der Geometria zugrunde liegen”, címen. Ami magyarul: „A geometria alapjait képező hipotézisekről”** címet jelenti. Ebben az előadásban-doktori habilitációban, egy nagyon általános geometria alapelveit fejtette ki **RIEMANN**. Ennek megalapozása egészen új, a teret egy nagyon általános topológiai halmazként értelmezte, amelyben egy geometriát az abban szereplő elemek halmaza és helyüknek ismerete — koordináták ismerete — valamint az eljárás, amellyel két végtelen közeli elem távolságát meg lehet határozni, azaz egy differenciálgeometria alapjait fektette le.

Mivel ezen tér görbülete nem egyenletes, túllépve Gauss külső görbületi sugarán, meghatározása lehetővé tette a belső görbületi sugár meghatározását. Riemann meghatározása a differenciális ívelemre illetve a távolságra egy másodfokú algebrai formával történik, amely a háromdimenziós térre:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dxdz \\
 & g_{21}dydx + g_{22}dy^2 + g_{23}dydz \\
 & g_{31}dzdx + g_{32}dzdy + g_{33}dz^2
 \end{aligned}
 \tag{13.44}$$

a fenti formulában a g együtthatók teljesen általános jellegűek, csupán annyi a megkövetés, hogy az $\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}$ változók folytonos függvényei legyenek és amelyek legalább kétszeresen differenciálhatók. Ebből az is következik, hogy a végtelen közeli pontokra nézve Riemann szerint a tér Euklidesz-i. Az alapelvek a vizsgált tér dimenziószámát nem kötik meg, ennek alapján a dimeziószám bármekkora lehet. Az így általánosított térben a tér íveleme:

$$ds^2 = \sum_{i=k=1}^n g_{ik}dx_i dx_k$$

Ez a differenciálgeometriai modell lett *Einstein Általános relativitás elméletének matematikai-geometriai bázisa*.

Azonban a létrejött abszolút geometriára más modellek is születtek, melyek nem differenciálgeometriák, hanem nagy méretekben is alkalmazhatók, ezek közül két modell fontos és általános nevezetesen:

1. *Caley-Klein féle síkgeometriák*, amely a síkon kiválasztott kör belsejében pontokat és egyeneseket esetenként az irányított egyeneseket használja.
2. Az *elliptikus sík*, amely egy gömböt használ fel modellként, a 2. ábra szerint.

13.5. A CALEY-KLEIN FÉLE SÍKGEOMETRIÁK

Amennyiben definiáljuk a hosszúság és szögmértékeket az alábbi táblázatban szereplő kilenc geometriát kapjuk:

A kilenc Caley-Klein-féle síkgeometria

	Szögmérték	Hosszúságmérték	
	Riemann	Euklideszi	Bolyai-Lobacsevszkij
	elliptikus	parabólikus	hiperbólikus
R	elliptikus Riemann geometria	Euklides geometria	hiperbólikus geometria Bolyai-Lobacsevszkij
E	antieuklideszi geometria	Galilei geometria	antipszeudo-euklideszi geometria
B - L	antihyperbolikus geometria	pszeudoeuklideszi térídő-geometria	bihyperbolikus geometria

13.5.1. A HÁROMSZÖGEK METRIKUS VISZONYAI

A fenti gömbbel és hiperboloiddal megszabott metrikák alapján felírhatók a három geometriában használatos háromszögekre vonatkozó metrikus formulák.

Ezek:

- RIEMANN
- EUKLIDÉSZ
- BOLYAI-LOBACSEVSZKIJ (HIPERBÓLIKUS GEOMETRIA)

A HÁROMSZÖG METRIKUS VISZONYAI

	Szögmérték	Hosszúság mérték	
	Riemann	Euklidesz	Bolyai-Lobacsevszkij
R	$\cos a = \cos b \cdot \cos c +$ $+ \sin a \cdot \sin c \cdot \cos A$ $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$ $\cos A = \cos B \cos C +$ $+ \sin B \sin C \cos a$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ $A = B + C$	$\operatorname{cha} = \operatorname{chb} \operatorname{chc} +$ $+ \operatorname{shb} \operatorname{shc} \cos A$ $\frac{\sin A}{\operatorname{sha}} = \frac{\sin B}{\operatorname{shb}} = \frac{\sin C}{\operatorname{shc}}$ $\cos A = \cos B \cos C +$ $+ \sin B \sin C \operatorname{cha}$
E	$a = b + c$ $\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$ $A^2 = B^2 + C^2 +$ $+ 2BC \cos a$	$a = b + c$ $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$ $A = B + C$	$a = b + c$ $\frac{A}{\operatorname{sha}} = \frac{B}{\operatorname{shb}} = \frac{C}{\operatorname{shc}}$ $A^2 = B^2 + C^2 + 2BC \operatorname{cha}$
B - L	$\operatorname{cosa} = \operatorname{cosb} \cdot \operatorname{cosc} +$ $+ \operatorname{sina} \cdot \operatorname{sinc} \cdot \operatorname{chA}$ $\frac{\operatorname{shA}}{\operatorname{sin a}} = \frac{\operatorname{shB}}{\operatorname{sin b}} = \frac{\operatorname{shC}}{\operatorname{sin c}}$ $\operatorname{chA} = \operatorname{chB} \operatorname{chC} +$ $+ \operatorname{shB} \operatorname{shC} \operatorname{cosa}$	$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \operatorname{chA}$ $\frac{\operatorname{shA}}{a} = \frac{\operatorname{shB}}{b} = \frac{\operatorname{shC}}{c}$ $A = B + C$	$\operatorname{cha} = \operatorname{chb} \cdot \operatorname{chc} +$ $+ \operatorname{shb} \cdot \operatorname{shc} \cdot \operatorname{chA}$ $\frac{\operatorname{shA}}{\operatorname{sha}} = \frac{\operatorname{shB}}{\operatorname{shb}} = \frac{\operatorname{shC}}{\operatorname{shc}}$ $\operatorname{chA} = \operatorname{chB} \operatorname{chC} +$ $+ \operatorname{shB} \operatorname{shC} \operatorname{cha}$

A térídő geometria a Minkowski féle geometria

A fenti táblázatban **a,b,c** a háromszög oldalait jelöli, míg **A;B;C** a szögeket jelöli.

A síkgeometriák *Caley-Klein féle osztályozása* a következő jellemzői vannak:

- A téridősík pontjait különféle jellemző tulajdonságokkal rendelkező számoknak foghatjuk fel:
 - Az *Euklidész*; *Galilei és a téridősík-Minkowski geometriák*, ahol *Euklides komplex szám* ($\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y$ ahol $\mathbf{i}^2 = -1$); *Galilei Study-szám* ($\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y$ ahol $\mathbf{i}^2 = 0$) és *téridő sík-Minkowski hiperbolikus komplex szám* ($\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{i}y$ ahol $\mathbf{i}^2 = 1$).
 - A fenti osztályozás még tovább is folytatható: az **elliptikus sík** (irányított) pontjai komplex számoknak tekinthetők.
 - Az **antieuklideszi és a pszeudóantieuklideszi sík** pontjait Study féle számoknak tekinthetjük és ábrázolhatjuk.
 - A **bihiperbolikus és antihiperbolikus sík** pontjait pedig hiperbolikus számokként írhatjuk és ábrázolhatjuk.
- Az elliptikus (*Riemann-féle*) szögmértékű *Caley-Klein síkok* az **elliptikus-sík**, az **euklideszi-sík** és a **hiperbolikus-sík**, pontjai tehát komplex számokkal ábrázolhatók.

- Az euklideszi szögmértékű síkok az **antieuklidesz-i, a Galilei és az antipszeudóeuklideszi síkok a Study számokkal** ábrázolhatók.
- A hiperbolikus szögmértékű (*Bolyai-Lobacsevszkij*) **síkok: az antihiperbolikus; a téridő-Minkowski és a bihiperbolikus síkok** a hiperbolikus komplex számokkal ábrázolhatók.

- Az elliptikus (*Riemann-féle*) **távolságmértékű síkok** esetén: (az elliptikus ; az antieuklideszi és az antihiperbolikus) a sík \mathbf{z} és \mathbf{z}_1 pontjainak távolsága:

$$\mathbf{d}_{\mathbf{z},\mathbf{z}_1} = \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{z}_1)(\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{z}}_1)}{(1 + \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}_1)(1 + \bar{\mathbf{z}} \cdot \bar{\mathbf{z}}_1)} \quad (13.45)$$

- Az euklideszi távolságmértékű síkon: (euklideszi ; Galilei és a téridő-Minkowski) *síkon*) a távolság

$$\mathbf{d}_{\mathbf{z},\mathbf{z}_1} = (\mathbf{z} - \mathbf{z}_1)(\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{z}}_1) \quad (13.46)$$

- A hiperbolikus távolságmértékű síkon (a hiperbolikus ;az antipszeudóeuklideszi és a bihiperbolikus síkon) a távolság:

$$\mathbf{d}_{\mathbf{z},\mathbf{z}_1} = \frac{(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z})(\bar{\mathbf{z}}_1 - \bar{\mathbf{z}})}{(1 - \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}_1)(1 - \bar{\mathbf{z}} \cdot \bar{\mathbf{z}}_1)} \quad (13.47)$$

A három geometriai rendszer fontosabb tulajdonságait a táblázatok mutatják:

5.3. Az euklideszi, a Bolyai–Lobacsevszkij-féle hiperbolikus és a Riemann-féle elliptikus geometriák néhány fontos tulajdonságának összehasonlítása

Összefoglalásként W. PRENOWITZ és M. JORDAN kiváló könyvéből [32] – amelynek sok részlete bekerült ebbe a munkába – vegyük át a különböző geometriákat összehasonlító táblázatot:

	Az euklideszi geometriában	A hiperbolikus geometriában	Az elliptikus geometriában	
Két különböző egyenes	<i>legfeljebb egy</i>	<i>legfeljebb egy</i>	<i>egy (egyszeres) kettő (kétszeres)</i>	pontban metszi egymást
Ha adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont, akkor	<i>egy és csak egy egyenes</i>	<i>legalább két egyenes</i>	<i>egy egyenes sem</i>	halad át a P -n, amely nem metszi az e -t
Egy egyenest egy pontja	<i>szétválasztja</i>	<i>szétválasztja</i>	<i>nem választja szét</i>	két részre
A párhuzamos egyenesek	<i>egyenlőközűek</i>	<i>nem egyenlőközűek</i>	<i>nem léteznek</i>	
Ha egy egyenes metszi két párhuzamos egyenes egyikét, akkor	<i>szükségképpen</i>	<i>néha</i>	—	metszi a másikat is
Érvényes a SACCHERI hipotézis	<i>derékszög-feltevés</i>	<i>hegyesszög-feltevés</i>	<i>tompaszög-feltevés</i>	

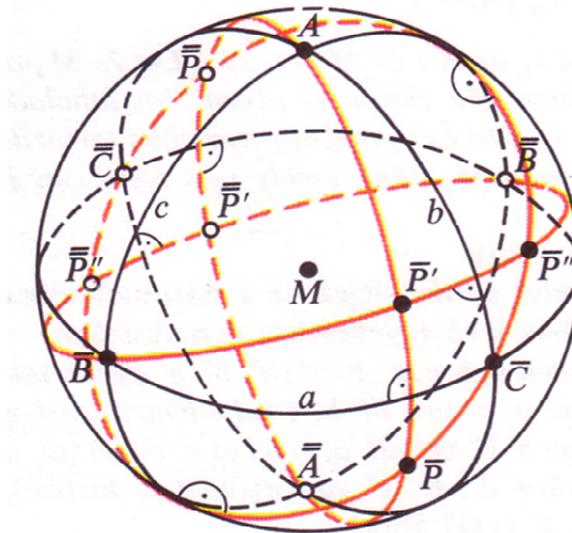
Egy adott egyenesre merőleges két különböző egyenes	<i>párhuzamos</i>	<i>nem metsző</i>	<i>metsző</i>	
A háromszög szögeinek összege	<i>egyenlő π-vel</i>	<i>kisebb, mint π</i>	<i>nagyobb, mint π</i>	
A háromszög területe	<i>független a szögek összegétől</i>	<i>arányos a szögösszeg hiányával</i>	<i>arányos a szögösszeg többletével</i>	
Két háromszög, amelyeknek megfelelő szögei egyenlők	<i>hasonló</i>	<i>egybevágó</i>	<i>egybevágó</i>	

A vizsgált tulajdonságokban a sferikus (gömbi) geometria megegyezik a kettős elliptikus geometriával, amelynek a modellje.

([53]Kálmán Attila:Nemeuklideszi geometriák elemei. 291,292 oldal, Budapest Nemzeti Tankönyvkiadó 2001.)

13.6. AZ ELLIPTIKUS GEOMETRIA GÖMBMODELLJE

13.6.1. A Riemann-geometria nemdifferenciális reprezentációja



2.ábra. Σ egységgömb

Nevezzük a gömb két-két szemben fekvő pontjának halmazát „pontnak”, a főköröket „egyeneseknek”. A merőlegesség és a tükrözés fogalmának elemi geometriai értelmezésével egy metrikus sík modelljét kapjuk, amelyben polárháromoldal, vagyis három, páronként egymásra merőleges a, b, c „egyenestől” álló alakzat létezik. A bal oldali ábrán ennek megfelel az $A = \{\bar{A}, \bar{A}\}$, $B = \{\bar{B}, \bar{B}\}$, $C = \{\bar{C}, \bar{C}\}$ „csúcspontokkal” rendelkező alakzat. Az a, b, c „egyeneseken” való tükrözésekre nyilvánvalóan $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = 1$ érvényes. Példaképpen a $P = \{\bar{P}, \bar{P}\}$ tükrözést tüntettük fel.

3.ábra. A gömbmodell jellegzetességeinek definíciói.

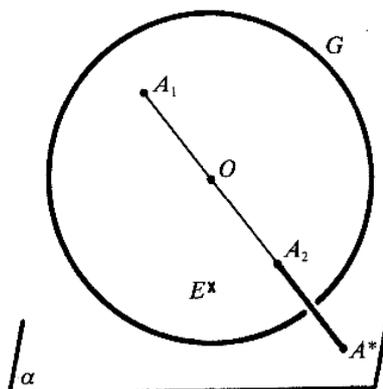
([54]Fritz Reinhardt-Heinrich Soeder: Atlasz Matematika 136 oldal/B, Atheneum Kiadó 1999)

Vegyük fenti euklideszi egységgömbnek Σ -nak a felét és megállapodásszerűen a gömb főköréi és a középpontja által alkotott síkok és a félgömb síkja által alkotott sík metszeteit a fél főkörön lévő **A** és **B** pontok közti ív hosszát tekintjük egy egyenes hosszának, míg a főkörök és a félgömb metszetei által alkotott szöveget tekintjük. Ezen mértékekkel—metrikával megszabott elliptikus geometria mozgásainak a félgömbön lévő egyenesek (átmérők) a gömb középpontja körüli forgatásai adják. (Σ félgömb metszetének síkját az átellenes pontpárok halmazának tekintjük.)

A gömb az alábbi fontos tulajdonságokkal rendelkezik,

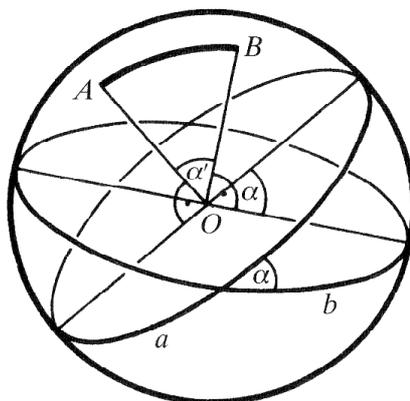
amelyek modelként is fontosak.

Az alábbi ábra mutatja a gömbi és a síkbeli pontok közti megfeleltetést aképpen, hogy az O ponton átmenő egyenes A_1 és A_2 pontokat összekötve az α síkon az A^* pontnak felel meg, amit *ideális* síkbeli pontnak nevezünk. Így tehát A_1 és A_2 valamint A^* kölcsönösen megfelelnek egymásnak. Mivel az *egységgömb* felülete 4π , azaz véges érték ezért az elliptikus α sík nagysága is véges 2π . A gömbi *félfőkör*-nek megfelelő síkbeli egyenes hossza pedig π .

4.ábra. Gömbi sík vetítése α síkra.**A Riemann geometria gömbi modelljének fontosabb jellemzői.**

- A Riemann-geometria sem ismeri a párhuzamos egyeneseket, és helyette axiómaként a következő definíciót alkalmazza:

* Nincsenek nem metsző egyenesek.
- Ezt az axiómát *Riemann* definiálta és ezen alapul az elliptikus geometria.
- Az elliptikus geometriának két változata is van: az **egyszeres** és a **kétszeres**, mindkettő kielégíti a fenti axiómát. Az **egyszeres elliptikus geometriában két eltérő egyenes mindig egy pontban metszi egymást** és nem osztja az α elliptikus síkot két külön ponthalmazra. A **kétszeres elliptikus geometriában két eltérő egyenes mindig két különböző pontban metszi egymást**, és minden egyenes két elválasztott két eltérő ponthalmazra (szeparábilis). Ez a két geometria a gömb modellben a félgömb és a teljes gömb képviseli.
- A gömbmodellben fontos tulajdonság, hogy: az egység sugarú gömbön (illetve az α síkon) **a** és **b** egyeneseket a leképezés (poláris) olyan, gömb felületén lévő **A** és **B** pontokba viszi amelyeknél az összekötő felületi ív hossza egyenlő az $\mathbf{ab} \angle \alpha$ szöggel. (4.táblázat gömbi modelje.)



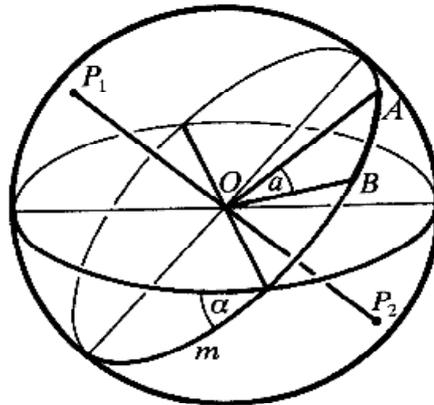
5.ábra. A 4. táblázat gömbi modellje.

Az 5. ábrán lévő gömbön láthatóak, a gömbi geometria fontosabb jellemzői, amelyek egyben a kétszeres elliptikus geometria jellemzői is ezeket az alábbi 4. táblázatban foglaltuk össze, így lehetséges az elliptikus geometria más paramétereinek meghatározása a gömbi geometria azonos elemei segítségével.

Gömbi és az elliptikus geometriák:

4.összehasonlító táblázata

<i>Kétszeres elliptikus geometria</i>	<i>Gömbfelület (modell)</i>
pont	pont a gömbfelületen (A)
egyenes	a G gömb főköre (m)
sík	a G gömb felülete
szakasz	a G gömb m főkörének az ívdarabja (\overline{AB})
két pont távolsága	a két pontot összekötő nemnagyobb főkörívdarab hossza a G felületén
két egyenes által közbezárt szög	gömbi szög, a két metsző főkör szöge, azaz a főkörök síkjának szöge (α)
a szög mértéke	a gömbi szögek mértéke



6.ábra. Gömbfelület modell fontosabb elemei.

([55]Kálmán Attila:Nemeuklédieszi geometriák elemei. 291,292 oldal, Budapest Nemzeti Tankönyvkiadó 2001.)

„.....a Riemann axióma teljesül a modellen, hiszen bármely két egyenes (főkör) pontosan két átellenes pontban metszi egymást.

Modellünk kielégíti az egyenesek elkülönítési tulajdonságait is, hiszen a gömb bármely két főköre két „idegen” pontthalmazra szeparálja a gömbfelszín (tőle különböző) pontjait.....Az is nyilvánvaló, hogy a modellünkön az egyenes zárt alakzatként jelenik meg.”

Téves lenne azt hinni: „.....a Riemann féle kétszeres elliptikus geometria nem más, mint a gömbi geometria új névvel!

Pontosan az ellenkezője igaz. Riemann főállította a geometriának egy új, elvont elméletét, amely ellentmond az euklédieszi sík geometriának, az a teljesen meglepő, hogy a kétszeres elliptikus geometria megbízhatóan ábrázolható gömbfelületen. Tehát.....a gömbi geometria a modellje a Riemann féle kétszeres elliptikus geometriának.”

([56]Kálmán Attila: Nemeuklédieszi geometriák elemei. 237. o.Budapest Nemzeti Tankönyv-kiadó 2001.)

Az egyszeres elliptikus geometria a Bevezetésben leírtak szerint származtatható a fenti kétszeres elliptikus geometriából:

Tehát az egyszeres elliptikus geometria, rendkívül hasonlít a gömbi-szférikus geometriához. A Σ félgömb adja a Riemann-féle elliptikus geometria gömbi modelljét. A Σ félgömb főköréi és a metszési sík találkozási pontjait összekötve kapjuk az összekötő egyeneses és a főkör által alkotott síkot, melyen a főköre adja az elliptikus sík **egyenesét**, az **A** és **B** pontokat összekötő ív adja az elliptikus sík **szakaszát**, melynek ívhossza \widehat{AB} adja az egyenes szakaszának hosszát -ez elliptikus mértékmeghatározás-. Az elliptikus (Riemann)-sík **a** és **b egyenesének szögén**, a rajtuk átfektetett (a gömb középpontján átmenő) síkok hajlásszögét tekintjük, az elliptikus sík sugársoarainak szögmértéke, tehát szintén elliptikus mérték.Az így meghatározott elliptikus sík mozgásainak szerepét a Σ gömbfelület gömbi középpontja körüli forgatásai játsszák. A Σ -t átellenes pontok párjai halmazának tekintjük.

Ugyancsak fontos tulajdonság az elliptikus geometriában, hogy az egyszeres elliptikus geometriában az egységsugarú gömbön lévő $\alpha; \beta; \gamma$ szögekkel rendelkező

háromszög területe:

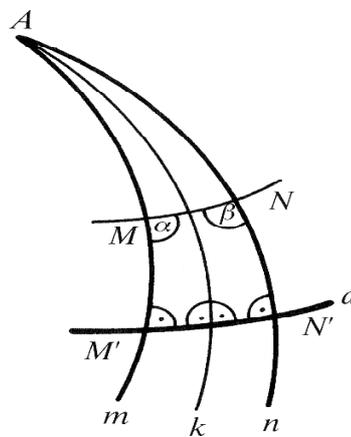
$$t_{\Delta} = \alpha + \beta + \gamma - \pi \tag{13.48}$$

Ugyanakkor általánosságban az **R** sugarú gömbön lévő háromszög területe:

$$t_{R\Delta} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2 \tag{13.49}$$

A 11.6. számú képlet jelentősége igen nagy, mivel a majdani intergalaktikus térben lehetőség van **R** mérésére, a helyi gravitáció mérésével és a háromszögeléssel pedig a mindenkori pontos irány kiszámítható.

A probléma lényege az, hogy a fénysugarakkal kijelölt metrika nem tekinthető a gravitációs tér metrikájának.



7.ábra.Valós és képzetes koordináták.

Az első és másodfajú egyenesek fontossága abban rejlik, hogy ezek egy komplex szám valós és képzetes részét adják. Az \overline{MN} jellegű görbék a valós részt, míg az m, k, n halmaza a képzetes részt reprezentálják.

1. Az m, k, n ...halmaza **elsőfajú egyenessereg** és **A pont az egyenessereg középpontja.**
2. **Másodfajú az \overline{MN} jellegű egyenessereg**, ha egy adott **a** egyenesre merőlegesek. (Az **a** egyenes az egyenessereg **tengelye.**)
3. A kétfajta egyenessereg párosítható s így kölcsönösen felcserélhetők elnevezésükben: *Riemann geometriának* a többi geometriához való csatlakozását ebből az ábrázolásból lehet könnyen származtatni, ha nem félgömb, hanem egyköppenyű hiperboloid síkmetszetét tekintjük a mérvadó felületnek, akkor a hiperbólikus metrika keletkezik teljesen azonos módon.
4. Bármely adott **a egyeneshez** létezik egy olyan **P** pont, amelyre igaz, hogy minden a **P** ponton átmenő egyenes merőleges az **a egyenesre.** Így az egyszeres elliptikus sík egyenesei és pontjai között egyértelmű megfeleltetés létesít pólus-poláris vonatkozás alapján.

A fenti elliptikus modell geometriára két fontos tétel vonatkozik:

1. Az elliptikus háromszögek oldalainak hosszúságának összege kisebb 2π -nél.
2. Az elliptikus háromszögekben a szögek összege π és 3π -között van.

13.6.2. **Riemann elliptikus és síkgeometria**

P a G görbe vizsgált pontja

PSZEUDEUKLIDESZI SÍKOK

- S símulósík,
- N normálsík,
- R rektifikálósík,

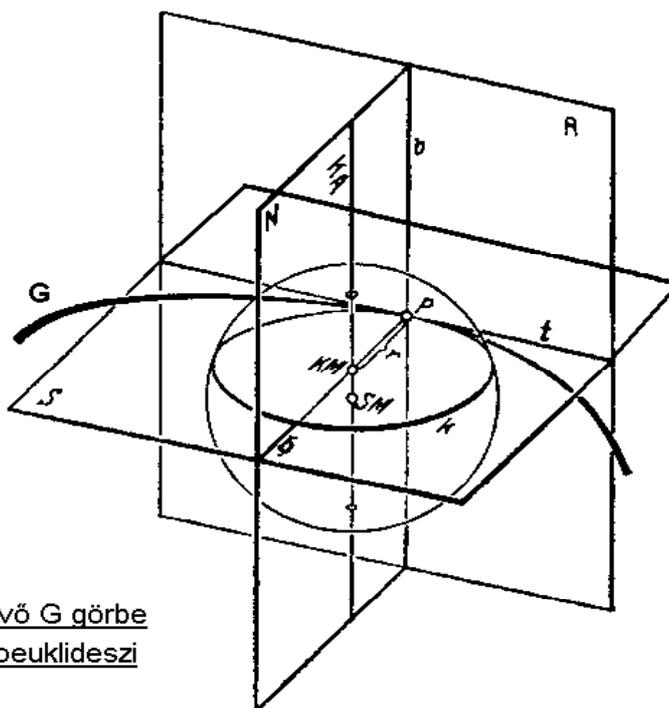
PSZEUDEUKLIDESZI TENGELEK

- t érintő
- h főnormális,
- b binormális,

RIEMANN JELLEMZŐK

- KA görbületi tengely,
- KM görbületi közép-pont,
- SM simulógömb közép-pont

A Riemann görbült térben lévő G görbe és a hozzá illesztett pszeudoeuklideszi geometriai jellemzők



8. ábra. A G görbe p pontjának pszeudoeuklideszi érintősíkjai (sebességek) és gömbi simuló felülete.

- Az általános relativitás elméletében a legalapvetőbb probléma a téridő görbülete, amely négydimenziós és csupán belső tapasztalataink vannak, ezért fontos a gömb mint kétdimenziós görbült felület, mivel ennek görbületét belső mérésekkel is meg lehet állapítani (Gauss-görbület), mivel a Gauss-görbület metrikus tenzorán és parciális deriváltakon keresztül kifejezhető.

• **Riemann általánosította a görbület fogalmát tetszőleges dimenzióra:**

(a gömbre is érvényes módon)

Ez a definíció elvetve a görbületi sugáron alapuló definíciót és a vektorok paralell transzportjára vonatkozó feltétellel helyettesítette: a vektorok paralell transzportja csak akkor nem zérus, ha a felület görbült. A nem görbült felületen a vektormező kovariáns deriváltja zérus.

Gömb esetén ez a tétel, csak a geodetikusra-főkörökre igaz. Ezért lehet jó modelként alkalmazni a Riemann geometria esetén a gömböt.

Tranzitív mozgás

„... Az (x^1, x^2) mozgó pont az idő „végtelen kicsiny”... megváltozása alatt -másodrendben kicsiny mennyiségek elhanyagolásával olyan pontba

jut....amely megtartja tér metrikáját és infinitézimális izometriának nevezük.... Most tegyük fel, hogy a Riemann- térben értelmezhető izometriáknak egy tranzitív csoportja, vagyis olyan csoport, mely a tér tér tetszőleges pontját tetszőleges pontba viszi.....Mivel a feltétel szerint az izometria csoport tranzitív, ezért a tér görbülete állandó és a csoport szükségképpen háromparaméteres. Ebben az esetben a a Riemann tér kicsiben euklideszi, Bólyai-Lobacsevszkij-féle vagy Riemann-féle elliptikus sík.” A három mozgathatósági fokú terek állandó görbületűek. Ha azonban a tér mozgathatósága egy, akkor lokálisan olyan, mint egy forgásfelület. Tehát olyan kétdimenziós Riemann-tér, melyben a merev testek két mozgathatósági fokúak, nem léteznek.”

([42/2] I.P. Jegorov: Geometria. 236-237 o. Tankönyvkiadó, Budapest,1986)

Ez volt Einstein számára az a lehetőség, hogy a Minkowski-féle szignatúrát véges távra tudja a téridőben továbbítani A felület itt szükségképpen sima és a másodfokú tagok elhanyagolható, ennek a következménye, hogy a kvantummechanika részecske képe nem vonható össze az *Einstein-féle* gravitációs képpel. A *Minkowski* geometria legegyszerűbb formája is kétdimenziós.

Jelenleg az eredetileg *Riemann-féle* geometria, először pseudoriemenn, majd további kis lépéssel a hiperbolikus pszeudoeuklideszi geometriát használják az általános relativitás elméletében, de ez nem engedhető meg, mivel az utóbbiban az eredeti görbevonallú koordináta együtthatók $\rightarrow „\mathbf{g}_{\nu\mu}”$ helyett, a merev metrikát eredményező $\mathbf{i}_1^2 = 1; \mathbf{i}_2^2 = -1$ és $\mathbf{i}_1 * \mathbf{i}_2 = \mathbf{0}$ típusú együtthatók kerülnek általános az használatba, melyek síkokat eredményeznek.

A gömb legfontosabb tulajdonságai:

A gömbnek valamely rögzített ponttól való távolsága és két rögzített ponttól mért távolságának viszonya állandó.

1. A gömb körrajza és metszete kör.
2. A gömb állandó szélességű és állandó kerületű.
3. A gömb csupa gömbi pontból áll.
4. A gömbnek nincs gyújtófelülete.
5. A gömbnek bármely geodetikusa zárt.
6. A gömb az összes egyenlő térfogatú test közül a legkisebb felületű, és az összes egyenlő felület test közül a legnagyobb térfogatú.
7. Az összes egyenlő felszínű test közül a gömbnek a legkisebb a teljes közepes görbülete.
8. A gömb közepes görbülete állandó.
9. A gömb állandó pozitív Gauss-féle görbületű.

10. A gömböt a mozgások háromparaméteres sokasága viszi át önmagába.

A gömbi geometria azonban az egyszeres elliptikus síknak is jó modelje, ezt az alábbi definíció és az azt követő gömbi geometria ismertetése egyértelművé teszi.

Az elliptikus geometria számításai tehát korrektek és egyértelműen vonatkoznak rá, ha a gömbi geometria fogalmait és formuláit használjuk:

A gömbi.....geometriában bármely két egyenes két diametriálisan átellenes pontban metszi egymást.megállapodunk abban, hogy a gömb tetszőleges diametriálisan átellenes pontpárját egyetlen pontnak tekintjük. **A gömb pontpárjainak ilyen azonosításával nyert faktorhalmazt elliptikus síknak nevezünk és S_2 -vel jelöljük.**

...Az elliptikus sík egyenseit a pontpárok fenti azonosításával a gömbi főkörökből nyerjük. Az egyenesek az előbbieket szerint így zárt vonalak lesznek.

Gömbi geometria

1.§ A gömbi geometria elemei

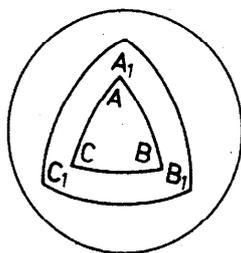
⋮

1. Polárgömbháromszögek

Minden, a gömb középpontján áthaladó α sík a gömböt főkörben metszi. Az α síkra merőleges átmérő A, A' végpontjai a *főkör pólusai*. Ekkor a főkört az A és A' pontok polárisának is nevezünk.

Nyilvánvaló, hogy a poláris pontjai a pólusoktól $\frac{\pi R}{2}$ távolságra vannak, ahol R a gömb sugarát jelöli. Az is világos, hogy ha egy adott pont egy főkör két pontjától is $\frac{\pi R}{2}$ távolságra van, akkor ez a pont pólusa ennek a főkörnek.

Most áttérünk a polárgömbháromszög definíciójára.



51. ábra

Ha az ABC gömbháromszög csúcsai egy másik $A_1B_1C_1$ gömbháromszög oldalainak pólusai (51. ábra), akkor ez utóbbi $A_1B_1C_1$ háromszöget az ABC háromszög polárgömbháromszögének nevezük.¹ Tehát az OA helyvektor merőleges az OB_1, OC_1 helyvektorokra, vagyis $\vec{OA} \cdot \vec{OB}_1 = \vec{OA} \cdot \vec{OC}_1 = 0$.

Analog módon kapjuk, hogy $\vec{OB}_1 \cdot \vec{OA}_1 = \vec{OB} \cdot \vec{OC}_1 = \vec{OC} \cdot \vec{OA}_1 = \vec{OC} \cdot \vec{OB}_1 = 0$.

Innen következik, hogy ha az $A_1B_1C_1$ háromszög az ABC háromszög polárgömbháromszöge, akkor az ABC háromszög is egyben az $A_1B_1C_1$ háromszög polárgömbháromszöge.

Ily módon az ABC és $A_1B_1C_1$ gömbháromszögek kölcsönösen egymás polárisai.

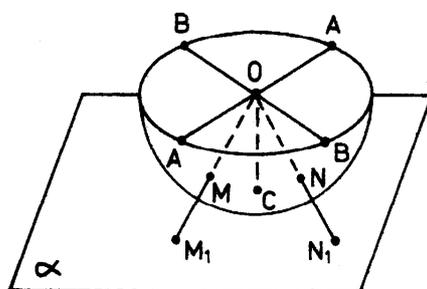
A gömbháromszög csúcsait és szögeit az A, B, C latin nagybetűkkel, a velük szemközti oldalakat rendre a, b, c latin kisbetűkkel jelöljük. Az előbbi gömbháromszög polárgömbháromszögének csúcsait és ezekkel szemközti oldalait indexekkel ellátott azonos betűk jelölik majd: A_1, B_1, C_1 és rendre a_1, b_1, c_1 .

Az ABC gömbháromszög A szöge (azaz a b és c oldalhoz A -ban vont érintők szöge) egyenlő az AOB és AOC síkok szögével. Ez pedig egyenlő az $\vec{OA} \times \vec{OB}$ és $\vec{OA} \times \vec{OC}$ vektoriális szorzatok szögével, vagyis

$$\cos A = \frac{(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC})}{|\vec{OA} \times \vec{OB}| \cdot |\vec{OA} \times \vec{OC}|} \quad (1.1)$$

A gömbháromszög hosszúságméreteit itt és a későbbi formulákban a gömb sugarához viszonyítjuk, ezért célszerű bevezetni a *redukált hosszúság* fogalmát. Két gömbi pont távolságának és a gömb sugarának az arányát redukált távolságnak nevezzük.

Ha az euklideszi térben a gömböt az O középpontból a C pontban érintő



α síkra vetítjük ($OC \perp \alpha$), akkor az elliptikus sík egyenesei az α euklideszi sík egyeneseibe „mennek át”. Ha az α érintősík pontjaihoz ideális pontokat is csatolunk, akkor az előbbi centrális vetítés olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés lesz, mely az elliptikus sík pontjaihoz a kibővített euklideszi sík, másképpen egy pro-

54. ábra

jektív sík pontjait rendeli. Nem tárgyaljuk itt az elliptikus geometria axióma-rendszerét, csak azt jegyezzük meg, hogy ezt a rendszert a projektív geometria axiómáiból és az egybevágósági axiómákból állíthatjuk össze.

A fenti leképezésnek megfelelően az S_2 sík minden egyes fogalmát kifejezhetjük a kétdimenziós projektív sík valamely fogalmával.

A fenti leképezésnek megfelelően az S_2 sík minden egyes fogalmát kifejezhetjük a kétdimenziós projektív sík valamely fogalmával. A megfelelő geometriai fogalmak és a projektív geometriai modell kapcsolatát a következő táblázattal jellemezhetjük.:

„pont”	pont a projektív síkon
„egyenes”	egyenes a projektív síkon
„szakaszok egybevágósága”	a szakaszok ősképeinek egybevágósága

A projektív modell nagy értéke, hogy benne a pontoknak és egyeneseknek számunkra szokásos fogalmak felelnek meg. Mégis az alakzatok egybevágósági tulajdonságainak tanulmányozásakor a gömbi modell kényelmesebb.

Megjegyezzük még, hogy az euklideszi tér O -ra illeszkedő egyenesei és síkjai az S_2 elliptikus sík újabb modelljét értelmezik, ahol a geometriai fogalmakat a következő táblázat szerint modellezzük:

S_2	Az E_3 O -nyalábhoz tartozó egyenesei és síkjai
„pont”	a nyaláb egyenese
„két pontpár elválasztása”	egy síkra illeszkedő két egyenespár elválasztása
„két pont közti távolság”	a két egyenes közti szöggel arányos mennyiség

Az elliptikus sík gömbmodellje, ahol a szemközti pontokat azonosítjuk, lehetővé teszi, hogy az elliptikus síkon (x, y, z) koordinátákat vezessünk be. Ezen koordináták között fennáll az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ egyenlőség, ahol R -et görbületi sugárnak, a sugárnégyzet reciprokát, $\frac{1}{R^2}$ -et pedig görbületnek nevezük. Az $A(x_1, y_1, z_1)$ és $B(x_2, y_2, z_2)$ pontok közti d távolságot az

$$R^2 \cos \frac{d}{R} = |x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2| \quad (2.1)$$

képletből határozhatjuk meg. A pontok közti távolság és a görbületi sugár hányadosát redukált távolságnak nevezzük. Az S_2 sík két pontját egymáshoz *polárisnak* (*konjugáltak*) mondjuk, ha az euklideszi térben nekik megfelelő egyenesek merőlegesek egymásra.

Más szóval a poláris pontokat az jellemzi, hogy redukált távolságuk $\pi/2$. Az egyenesek olyan szakaszát, melyet polárisan konjugált pontok határolnak, félegyenesnek nevezzük. Az egyenes két félegyenesből áll, és ezért az egyenes redukált hossza π . Világos, hogy egy adott $\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1)$ ponthoz poláris (x, y, z) pontok

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 = 0 \quad ((2.2))$$

egyenletű egyenest alkotnak. Ez az egyenes az A pont polárisa, az A pont pedig a (2.2) egyenes pólusa.

Egy egyenesre merőleges egyenesek mind az adott egyenes pólusában metszik egymást. Fordítva is, minden egyenes, amely áthalad egy adott egyenes pólusán, merőleges az adott egyenesre. Ezek a tulajdonságok azonnal következnek a pólus és a poláris definíciójából.

Az S_2 elliptikus geometriában kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a pontok és az egyenesek között, ahol minden ponthoz apolárisát rendeljük, s így minden egyenes a pólusához van hozzárendelve. Ezt a leképezést poláris leképezésnek nevezzük. Az egységnyi görbületű elliptikus síkon a poláris leképezés az a, b egyeneseket olyan A, B pontokba viszi, hogy a pontok közti távolságegyenlő az adott egyenesek szögével. Innen adódik az elliptikus síkgeometria úgynevezett dualitási elve, vagyis ha az elliptikus geometria valamely tételében a „pont”, „egyenes” „illeszkedik”, valamint a „távolság”, „szög” szavakat rendre az „egyenes”, „pont”, „illeszkedik”, „szög”, „távolság” szavakra cseréljük, akkor ugyancsak ebben a geometriában igaz állításhoz jutunk. A fenti módon kapott úgynevezett duális állításokra példák az alábbiak: bármely két pont meghatároz egy rájuk illeszkedő egyenest; bármely két egyenes meghatároz egy rájuk illeszkedő pontot.”

([57] I.P.Jegorov: Geometria.144-145.,153-155.o Budapest,Tankönyvkiadó,1986.)

A görbült felület metrikája →Gauss-féle

Egy felületen lévő $u = u(t)$, $v = v(t)$ görbe $t_0 \leq t \leq t_1$ szakaszának ívhossza:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} ds$$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E \left(\sqrt{\frac{du}{dt}} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt \tag{13.50}$$

Két görbe szöge valamely metszéspontjában (azaz az M pontban meghúzott érintők által bezárt szög), ha az M pontban a görbék irányvektorai $d\mathbf{r}$ és $\delta\mathbf{r}$, görbék ívelemeihez tartozó u és v értékek megváltozásai pedig du és dv ill. δu és δv , a

$$\cos(\alpha) = \frac{d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}}{\sqrt{(d\mathbf{r})^2(\delta\mathbf{r})^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\delta v + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \tag{13.51}$$

13.54 formula lapján határozható meg, ahol az E, F, G együtthatóknak mindenütt az M pontbeli értéke értendő. Ha az 13.54 formula számlálója zérus, akkor a két vonal merőleges egymásra; annak feltétele, hogy $v = const.$ és $u = const.$ koordinátavonalak egymásra merőlegesek legyenek az $F = 0$.

A felület valamely görbe által határolt T területe, kettős integrállal számítható ki:

$$T = \int_{(S)} d\mathbf{S}$$

$$d\mathbf{S} = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (13.52)$$

Ha tehát az első kvadratikus forma E , F , G együtthatóit ismerjük a 13.53, 13.54, 13.55 formulák segítségével lehetséges a felületen hosszúságot, szögeket és területet mérni, azaz az első kvadratikus formula egyértelműen meghatározza a *felület metrikáját*.

A felület geodetikus vonalai → Gauss-féle

Egy felület bármely $M(u, v)$ pontjánát bármely dv/du értékkel meghatározott irányban húzható a felületen egy görbe az ugynevezett *geodetikus vonal*, amely a felületen ugyanazt a szerepet játsza, mint a síkon az egyenes.

1. Ha egy anyagi pont a felületen kényszerül mozogni, akkor ha külső erő nem hat rá, *geodetikus vonal mentén mozog*.
 2. Felületen kifeszített rugalmas fonal *geodetikus vonal alakját ölti*.
 3. A felületen bármely két pont közötti *legrövidebb vonal a geodetikus vonal*.
- Definíciószerűen a geodetikus vonalaknak az olyan felületi görbéknek nevezzük, a melyek főnormálisa minden pontban egybeesik a felület normálisával.
 - A *geodetikus vonalak egyenlete*, ha a felület $z = f(x, y)$ formában van megadva az alábbi differenciál egyenlet:

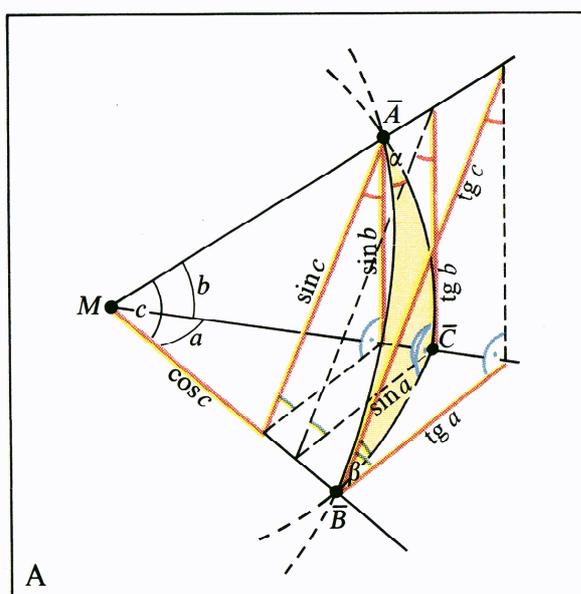
$$(1 + p + q) \frac{d^2 y}{dx^2} = pt \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + (2ps - gt) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (pr - 2qs) \left(\frac{dy}{dx} \right) - qr$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

13.6.3. *Tetszőleges gömbi háromszög számítása*

- A háromszögek egyik csúcspontjából a szemben lévő oldalra merőlegest bocsátunk, a keletkező derékszögű háromszögek számításával az *elliptikus háromszögek*re olyan tételeket kaphatunk mint a hiperbolikus geometriának is — a szögfüggvények definíciója kivételével — megfelelnek
- **Koszinusz tétel oldalakra:**

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha) \\ \cos(b) &= \cos(c) \cos(a) + \sin(c) \sin(a) \cos(\beta) \\ \cos(c) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \cos(\gamma) \end{aligned}$$



Derékszögű háromszög

9.ábra. Gömbi derékszögű háromszög szögfüggvényei.

([58] F.Reinhardt-H.Soder: Atlasz Matematika,188.o. Atheneum Kiadó,1999.)

• **Szinusztétel:**

$$\sin a \div \sin b \div \sin c = \sin \alpha \div \sin \beta \div \sin \gamma \tag{13.53}$$

• **Koszinusz tétel szögekre:**

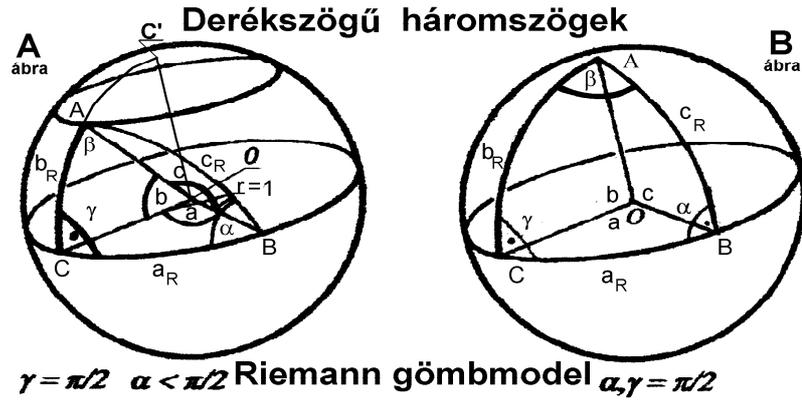
$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= -\cos(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\beta) \sin(\gamma) \cos(a) \\ \cos(\beta) &= -\cos(\gamma) \cos(\alpha) + \sin(\gamma) \sin(\alpha) \cos(b) \\ \cos(\gamma) &= -\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(c) \end{aligned} \tag{13.54}$$

• **Derékszögű háromszög számítása:**

$$\begin{aligned} \tan a &= \tan \alpha \sin b & \tan a &= \cos \beta \tan c \\ \tan b &= \tan \beta \sin a & \tan b &= \cos \alpha \tan c \\ \\ \sin a &= \sin \alpha \sin c & \sin b &= \sin \beta \sin c \\ \cos c &= \cos a \cos b & \cos c &= \cot \alpha \cot \beta \\ \cos \alpha &= \cos a \sin \beta & \cos \beta &= \cos b \sin \alpha \end{aligned}$$

13.6.4. *Mozgó test sebességének növekedése és az időlassulás*

- A 6. fejezetben részletesen foglalkoztunk a mozgó test idejének változásával, az időlassulással. A speciális relativitás elméletben lévő idő definíció alapján, egy „v” sebességgel mozgó koordináta rendszerben a „c₀” sebességű fényjelnek az oda-vissza út megtételéhez szükséges idő: legyen az r_{AB} rúd egységnyi hosszúságú:



10.ábra. Gömbfelületi derékszögű háromszög és kétderékszögű háromszög.

$$t = t_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V_c + v}$$

$$t' = t_B - t'_A = \frac{r_{AB}}{V_c - v}$$

$$t' - t = \frac{r_{AB}}{V_c - v} + \frac{r_{AB}}{V_c + v}$$

– ha az r_{AB} rúd egységnyi hosszúságú, az időlassulás:

$$t' - t = \frac{1}{V_c - v} + \frac{1}{V_c + v}$$

– továbbá ha V_c fénysebesség egységnyi, az időlassulás:

$$t' - t = \frac{1}{1 - v} + \frac{1}{1 + v}$$

– valamint v koordináta rendszer sebessége $\tan(\alpha, \beta)$:

$$t' - t = \frac{1}{1 - \tan b} + \frac{1}{1 + \tan b}$$

– vagy

$$t' - t = \Delta t = \frac{2}{\sqrt{1 - (\tan(b))^2}}$$

A gömbi derékszögű háromszög adatai:

$$\gamma = \pi/2 \quad a_R = 1$$

A Riemann-féle geometria gömbi modelljén látszik, hogy a $v_R = \tan b$ sebesség, amelyben az α szög és az b_R oldal $0 \Rightarrow \pi/2$ között változik miközben a c oldal $\overrightarrow{CC'}$ íven fut végig – ahol C' a Riemann számgömb végtelen távoli pontja – és ebben az esetben $a_R = a = 1$, valamint $c_R = \pi/2$ hosszúságú, így

$$\tan b = \tan \beta \cdot \sin a \tag{13.55}$$

• **Derékszögű háromszög számítása:**

$$\begin{aligned} \tan a &= \tan \alpha \sin b & \tan a &= \cos \beta \tan c \\ \tan b &= \tan \beta \sin a * & \tan b &= \cos \alpha \tan c \\ \\ \sin a &= \sin \alpha \sin c & \sin b &= \sin \beta \sin c \\ \cos c &= \cos a \cos b & \cos c &= \cot \alpha \cot \beta \\ \cos \alpha &= \cos a \sin \beta & \cos \beta &= \cos b \sin \alpha \end{aligned}$$

I.A gömbi modellen lévő A jelű ábra alapján a v_R sebesség számítása:

A \overline{CA} körív a gömb felületére rajzolt egységnyi sugarú kör része, a „ α ” szög növekvő értéke a növekvő sebesség miatt növekvő szög, amellyel a

Riemann féle sebesség: $\tan b = v_R$.

Adatok :

$$a_R = 1, \quad \gamma = \pi/2 \tag{13.56}$$

tehát $\tan b_R = \tan \beta \sin a, \rightarrow b_R = \arctan(\tan \beta * \sin(1)) = \arctan(0.8415 * \tan(\beta))$

$$b_R = \arctan(0.8415 * \tan(\beta))$$

így

$$v_R = \tan b_R = \tan(\arctan(0.8415 * \tan(\beta))) \tag{13.57}$$

mivel a gömb sugara egységnyi, ezért a gömbi felületen lévő ívek és a középponti szögek egyenlőek, azaz

$$v_R = \tan b = \tan(\arctan(0.8415 * \tan(\beta)))$$

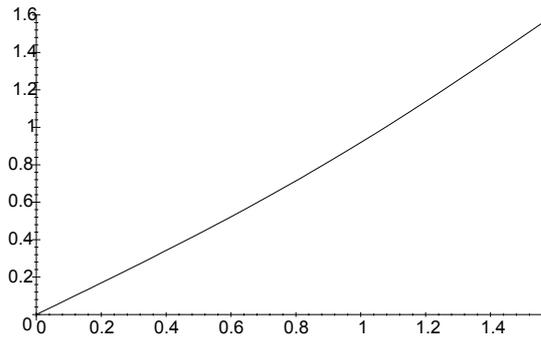
$v_R = \tan(\arctan(0.8415 * \tan(\beta)))$; ha $\alpha \Rightarrow 0.. \pi/2$ tartományban változik, de $\pi/2$ nem része a tartománynak, mivel ott a tangens függvény nem értelmezett, illetve a

$$\tan \pi/2 = \delta \text{ ha } \alpha \Rightarrow \pi/2 \tag{13.58}$$

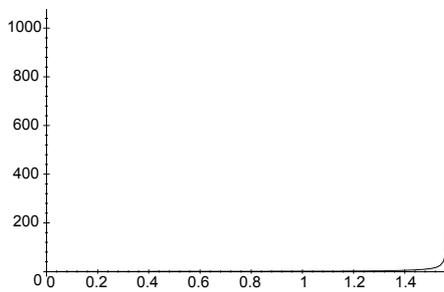
és

$$\tan \pi/2 = -\delta \text{ ha } \pi - \alpha \Rightarrow \pi/2 \tag{13.59}$$

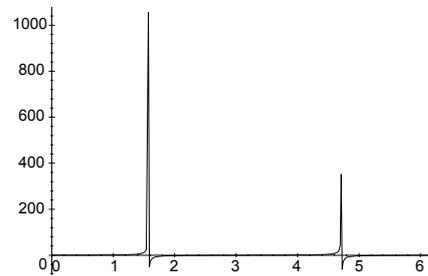
„ b ” $\Rightarrow \arctan(0.8415 * \tan(\beta))$



Az „b” középponti szög változása „β” szög függvényében.
 $\tan(\arctan(0.8415 * \tan(\beta)))$



v_R sebesség a „b” $0 \rightarrow \pi/2$ íven.

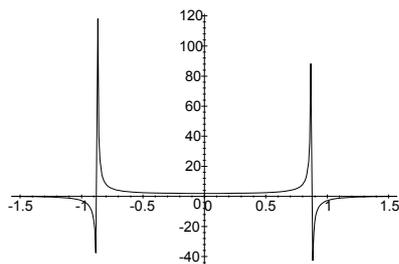


v_R változása egy főkörön.

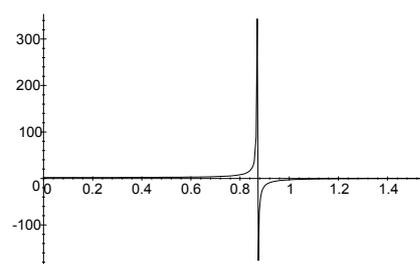
Időlassulás:

$$T = \frac{1}{1 - \tan b} + \frac{1}{1 + \tan b}$$

$$T = \frac{1}{1 - \tan b} + \frac{1}{1 + \tan b} = \frac{1}{(1 - \tan(\arctan(0.8415 * \tan(\beta))))} + \frac{1}{1 + \tan(\arctan(0.8415 * \tan(\beta)))}$$



Időlassulás egy főkörön.



Időlassulás a $0 \rightarrow \pi/2$ íven.

Időlassulás átlaga:

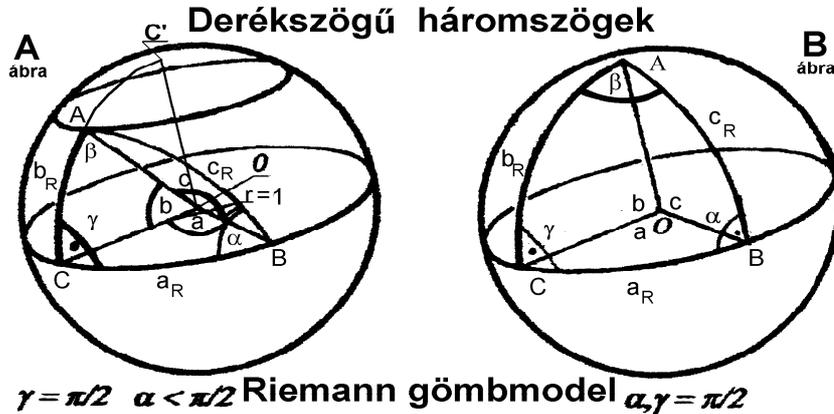
$$T_{il} = \left(\int_0^{1.57} T * dt \right) \div \pi/2$$

$$\left[\frac{1}{1 - \tan(\arctan(0.8415 * \tan(\alpha)))} + \frac{1}{1 + \tan(\arctan(0.8415 * \tan(\alpha)))} \right] \div \pi/2$$

A fenti formulát sem kiszámítani sem felrajzolni a benne lévő szingularitás miatt a gépben lévő szimbolikus matematika program nem tudja.

Ebben a részben a továbbiakban nem az eddigi a szövegszerkesztőben lévő egyszerűsített szimbólikus matematika programot használom, hanem az 1.számú mellékletben lévő eredményeket, amiket a MAPLE V. RELEASE 4. szimbólikus matematika program segítségével készítettem:

13.6.5. Derékszögű háromszög számítása ha $\alpha = \pi/2$



10/2.ábra. Gömbfelületi derékszögű háromszög és kétderékszögű háromszög.

$$\alpha = \pi/2 \quad \gamma = \pi/2 \quad b = 1 \tag{13.60}$$

„...Ha két vagy három szög derékszög, az a. 5. tétel következményeképp minden szög ugyanakkora, mint a vele szemben lévő oldal.,,
 ([59] F.Reinhardt-H.Soder: Atlasz Matematika, 188.o. Atheneum Kiadó,1999. 188.o.)

• I.Derékszögű háromszög számítása: B. jelű ábrára, ahol:

$$\alpha = \pi/2 \quad \beta = 1 \quad \gamma = \pi/2 \tag{13.61}$$

$$\begin{aligned} \tan a &= \tan \alpha \sin b & \tan a &= \cos \beta \tan c \\ \tan b &= \tan \beta \sin a & \tan b &= \cos \alpha \tan c \\ \sin a &= \sin \alpha \sin c & \sin b &= \sin \beta \sin c \\ \cos c &= \cos a \cos b & \cos c &= \cot \alpha \cot \beta \\ \cos \alpha &= \cos a \sin \beta & \cos \beta &= \cos b \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \pi/2 &= \tan \pi/2 \sin 1 = \infty & \tan \pi/2 &= \cos 1 \tan \pi/2 = \infty & (13.62) \\ \tan \pi/2 &= \tan 1 \sin \pi/2 = \infty & \tan 1 &= \cos \pi/2 \tan \pi/2 = 1.55766 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \pi/2 &= \sin \pi/2 \sin \pi/2 = 0 & \sin 1 &= \sin 1 \sin \pi/2 \\ \cos \pi/2 &= \cos \pi/2 \cos 1 = 0 & \cos \pi/2 &= \cot \pi/2 \cot 1 = 0 \\ \cos \pi/2 &= \cos \pi/2 \sin 1 = 0 & \cos 1 &= \cos 1 \sin \pi/2 = \cos 1 \end{aligned}$$

Ezekből a használható összefüggések:

$$\tan \beta = \tan 1 = \tan 1 \sin \pi/2 = \tan 1 \quad (13.63)$$

$$\cos \beta = \cos 1 = \cos 1 \sin \pi/2 = \cos 1 \quad (13.64)$$

A 13.65 összefüggésekből a $v_R = \tan(\beta) \sin(a)$ értéke mivel a $\tan(\beta)$ nem ad megoldást, így azt nem lehet kiszámítani, ennek alapvető oka, hogy a fizikai elméletekben a számítások gyakran vezetnek szingularitásokra, holott a fizikai kép erre nem ad okot. Az ilyen szingularitások sokszor azért adódnak, mert valamilyen fizikai jelenségnél matematikai extrapolációt hajtunk végre, ami elszakad a fizikai jelenségtől, ilyen probléma ez is, jól látszik az 9.ábrán, hogy a $\tan(b)$ egyenese párhuzamossá válik az \overline{OC} egyenessel, azonban a gravitáció által kialakított görbült terekben ilyen jelenség nem léphet fel, különösen azért nem mivel, ellentétben áll az **elliptikus geometria axiómájával miszerint nem lehetnek benne egymást nem metsző egyenesek**, ezért át kell térni a görbült tér, jelen esetben a *Riemann féle elliptikus tér felületi ívhosszainak használatára*. feltételei adottak, a jelen esetben, mivel kétdimenziós síkfelületen számolunk nincs szükség rá.

II:Sebesség és időlassulás számítása általános gömbi formulákkal:

$$v_R = \tan(a_R) = \tan(a)$$

A megoldás formulái: 1;5 jelű egyenlőségek

$$1.A. \sin a \div \sin b \div \sin c = \sin \alpha \div \sin \beta \div \sin \gamma \quad (13.65)$$

$$1.B. \frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \quad (13.66)$$

$$2.A. \cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha) \quad (13.67)$$

$$2.B. \cos(b) = \cos(c) \cos(a) + \sin(c) \sin(a) \cos(\beta)$$

$$2.C. \cos(c) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \cos(\gamma)$$

$$3.A. \cos(\alpha) = -\cos(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\beta) \sin(\gamma) \cos(a) \quad (13.68)$$

$$3.B. \cos(\beta) = -\cos(\gamma) \cos(\alpha) + \sin(\gamma) \sin(\alpha) \cos(b)$$

$$3.C. \cos(\gamma) = -\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(c)$$

$$4. \sin(a) \cot(b) = \cot(\beta) \sin(\gamma) + \cos(a) \cos(\gamma) \quad (13.69)$$

$$5. \sin(\alpha) \cot(b) = \cot(\beta) \sin(c) - \cos(\alpha) \cos(c) \quad (13.70)$$

Esetünkben adott egy oldal és a rajta lévő két szög:

$$a_R = 1, \alpha_R(\text{változó}), \gamma_R = \pi/2$$

Az 5.képlet átalakítása: mivel az $a_R - b_R - c_R$ háromszög el van forgatva az 1. táblázat ad segítséget:

1.táblázat:

$$\begin{aligned} c &\rightarrow b_R \\ b &\rightarrow a_R \\ a &\rightarrow c_R \\ \alpha &\rightarrow \gamma_R \\ \beta &\rightarrow \alpha_R \\ \gamma &\rightarrow \beta_R \end{aligned}$$

5.képlet módosítása:

$$\sin(\gamma_R) \cot(a_R) = \cot(\alpha_R) \sin(b_R) - \cos(\gamma_R) \cos(b_R)$$

$$1 * \cot(a_R) = \cot(\alpha_R) * 1 - 0 * \cos(b_R)$$

ebből *Alapképlet1.*:

$$\cot(a_R) = \cot(\alpha_R) * 0.84147$$

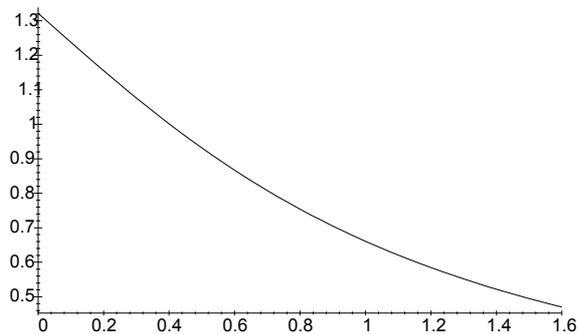
A továbbiakban az „R” indexet elhagyva a gömb felületére rajzolt derékszögű háromszög szögei helyett a hozzátartozó központi szögeket, használom, ez megtehető, mivel a gömb sugara egységnyi: így pl.: $a_R = a$. Továbbá, mivel a cosinus egyenlőségek cirkuláris módon forgathatók, az elforgatott egyenletek azonos végeredményt adnak.

Tehát adódik *Alapképlet2.*:

$$a = \operatorname{arccot}(\alpha) * 0.84147$$

$$\sin(1) = .84147$$

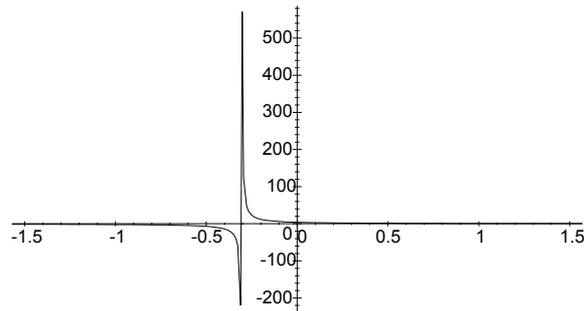
$$a = \operatorname{arccot}(\alpha) * 0.84147$$



A „a” oldal és központi szög nagysága ha $\alpha = 0 \rightarrow \pi/2$.

$$\text{A Riemann sebesség: } v_R = \tan(a) = \tan(\operatorname{arccot}(\alpha) * 0.84147)$$

$$\tan(\operatorname{arccot}(\alpha) * 0.84147)$$



A $v_R = \tan(b)$ nagysága a főkörön $\alpha = -\pi/2 \rightarrow \pi/2$.

Az időlassulás:

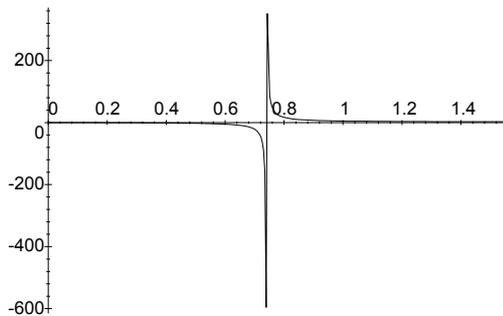
$$T = \frac{2}{1 - (\tan(\alpha))^2} \tag{13.71}$$

Az időlassulás 13.20 formulájának átalakítása:

$$T = \frac{1}{1 - \tan(\alpha)} + \frac{1}{1 + \tan(\alpha)} \tag{13.72}$$

Az időlassulás értéke a $0 \rightarrow \pi/2$ ívszakaszon:

$$T = \frac{2}{1 - (\tan(\operatorname{arccot}(\alpha) * 0.84147))^2}$$



Az időlassulás átlagos értéke a $0 \rightarrow 1.57$ ívszakaszon:

$$T_{tl} = \sum_0^{1.57} \frac{2}{1 - (\tan(\operatorname{arccot}(\alpha) * 0.84147))^2} \div 1.57$$

A fenti formulát sem kiszámítani sem felrajzolni a benne lévő szingularitás miatt a gépben lévő szimbolikus matematika program nem tudja.

Ennek megoldásához szintén nem az eddigi a szövegszerkesztőben lévő egyszerűsített szimbolikus matematika programot használom, hanem az 2.számú mellékletben lévő eredményeket, amiket a MAPLE V. RELEASE 4. szimbolikus matematika program felhasználásával készítettem.

Ebből az következik, hogy a **Riemann sebesség** a modellként alkalmazott gömbfelületen a lassulás helyett gyorsulás lép fel és a fénysebességet a \mathbf{T}_2 -t ábrázoló (2. mellékleten lévő) 3.ábrán $\mathbf{b}=1$ értékénél éri el. Az ennél nagyobb sebességeket úgy érhetjük el, hogy az egységgömbön \mathbf{b} értékét csökkentjük.

II. v_R számítása derékszögű háromszög trigonometriája alapján ha $\alpha = \pi/2$.

$$\alpha = \pi/2 \quad \gamma = \pi/2 \quad b = 1 \quad (13.73)$$

- **Színusztétel:**

$$\sin a \div \sin b \div \sin c = \sin \alpha \div \sin \beta \div \sin \gamma \quad (13.74)$$

- **Koszinusz tétel oldalakra:**

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha) \\ \cos(b) &= \cos(c) \cos(a) + \sin(c) \sin(a) \cos(\beta) \\ \cos(c) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \cos(\gamma) \end{aligned} \quad (13.75)$$

- **Koszinusz tétel szögekre:**

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= -\cos(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\beta) \sin(\gamma) \cos(a) \\ \cos(\beta) &= -\cos(\gamma) \cos(\alpha) + \sin(\gamma) \sin(\alpha) \cos(b) \\ \cos(\gamma) &= -\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(c) \end{aligned} \quad (13.76)$$

$$\sin \pi/2 \div \sin 1 \div \sin \pi/2 = \sin \pi/2 \div \sin 1 \div \sin \pi/2 \quad (13.77)$$

$$\begin{aligned} \cos(\pi/2) &= \cos(1) \cos(\pi/2) + \sin(1) \sin(\pi/2) \cos(\pi/2) \equiv 0 \\ \cos(1) &= \cos(\pi/2) \cos(\pi/2) + \sin(\pi/2) \sin(\pi/2) \cos(1) \\ \cos(\pi/2) &= \cos(\pi/2) \cos(1) + \sin(\pi/2) \sin(1) \cos(\pi/2) \equiv 0 \end{aligned} \quad (13.78)$$

$$\sin(1) = \sin(1) \quad \cos(1) = \cos(1)$$

A fenti megoldó képletek, amelyek az általános háromszögre érvényesek két azonosságra vezetnek amelyek alapján a feladat nem oldható meg. Ennek alapvető oka, hogy a *Riemann-geometria igen kis méretekben az Euklidesz-i geometria szögfüggvényeire támaszkodnak*, amelyeknek a $\tan(\pi/2)$ értékre nincs megoldása.

A fénysebesség az ív .078 radiájánál van ez $\mathbf{c} = 1$ sebesség, míg a cca 1.57 radiánál a sebesség $\mathbf{c} = \infty$ az 1 és az 1.57 radián közti ívszakaszon, a fénysebesség nem lineárisan nő, és ezzel együtt az időlassulás is nő, azonban ez szinguláris típusú végtelen növekvés és mint azt az 1.sz. mellékletben közelítéssel kiszámítható volt, a gyors növekedés és lassulás igen rövid ideig tart ezért az átlagsebességet nem igazán befolyásolja.

13.7. Stabil hullácsolag: a soliton.

Néhány gondolat a gravitációs hullámról.

A fotonok stabilitása már hosszú idő óta lényeges probléma, nevezetesen a probléma magja az, hogy a szabad térben terjedő hullácsolag nem diszperzív. Ez azt jelenti, hogy minden komponense azonos sebességgel terjed, azaz fázissebességük azonos, ennek következtében a modulált fényjel, vagy spektrum nem változik meg legfeljebb eltolódik. Ebből ugyanis az a következmény adódik, hogy a fény sebessége a relativitás elméletének megfelelően az üres téridő kontinuumban abszolút természeti állandó és *Einstein szerint* az elektromágneses tér terjedése egyben a gravitációs jelenségek terjedésének sebessége is.

De azt, hogy tulajdonképpen mi terjed a gravitációs jelenségek felléptekor hullámformában, a feltételezett graviton vajon mi-csoda, még semmi reális értelmezése nem történt.

Valójában három részből áll az általunk még igen kevésbé ismert Univerzum illetve tovább gondolva a multi-Univerzum. Ez a három a **tér-idő-anyag, amely elválaszthatatlan** egységet alkot. Ha most elfogadjuk a tömeg-energia ekvivalenciát — illetve ezek egymásba alakíthatóságát — az azzal a következménnyel jár, hogy a **tér-idő-tömeg rendszer egyenértékűsége miatt a tér-idő rendszer azaz az Einstein-i téridő kontinuum is energia.** Ebből egy már általánosan is elfogadottá vált a kvantummechanikában a nevezetes „*nullponti energia*”, ami azonban a tér egy külön megfigyelt pontjában időfüggő, ami egyben azt jelenti, hogy az idő is energia. Ismeretes, hogy *Einstein* a stabil Univerzum érdekében alapegyenletében bevezetett, teljesen önkényesen egy λ állandót, amit később az Univerzum tágulása miatt — *Hubble* — kihagyott. Ám ebből már nem következett, hogy a téridő kontinuumnak nincs hatása a kozmikus dinamikára. Ennek nyomán λ visszakerült a kozmológiába, mint a *vákuum energiája, ami az Einstein féle egyenletek szerint gravitációs tasztást hoz létre.*

Itt érdemes visszaemlékezni a *sötét anyag-többletgravitáció és a sötét energia-többlet tasztás* hatásokra, ami az Univerzum korát megnöveli. A λ megnöveli a tágulást : gyorsítja, míg a csillagok, fekete lyukak, gázok és a sötét anyag lassítja. Tehát az Univerzum kora nagyobb mint a *Hubble idő*. Ebben az általános tágulásban játszhat alapvető szerepet a gravitációs hullám, hasonló módon, mint a tóban terjedő hullámok, amik ostromolják és formálják a partot, ami esetünkben az **anyag**.

Fel kell tehát tenni mi van az üres téridő kontinuumban, egészen nyilvánvaló, hogy 3.fejezetben részletesen felsorolt mindenféle ott van ezt már tudjuk, de ezek egyike sem a gravitációs hullám. Az felsoroltakon kívül még egy valami van és ez tehát nem más mint maga a téridő, ez az összefoglaló név eltakarja azt a tényt, hogy két eltérő alkotórészből áll a térből és az időből, amelyek egészen eltérő tulajdonságokkal rendelkeznek azaz egy kétkomponensű, s így komplex mennyiségként

kezelhető különös, energiával rendelkező „anyag”- valami, amely többek között azzal a furcsa tulajdonsággal is bír, hogy a térkomponens, amit képzetes mennyiségnek is tekinthetünk a kontinuumban térszerű geodetikusan terjed, míg az idő, melyet valós komponensként tételezhetünk az időszzerű geodetikusan terjed. Mivel a két komponens más-más úton terjed, az elektromágneses hullámoknál ismert diszperziós jelenség nem léphet fel. Bátran feltehetjük hogy a nagyobb amplitúdóval a térkomponens rendelkezik, ami nagyobb teljesítményt is jelent, ezért terjed a rövidebb geodetikusan, míg az idő komponens, amely a valós részt jelenti egyben a veszteséges rész is, ezért a hosszabb geodetikusan terjed, ha a kettő között valamilyen kapcsolat folyamatosan fennáll, mint például a kvantummechanikából ismert szétterjedő fotonok közti kapcsolat, akkor minden lehetőség adott arra, hogy hatásuk egyesülve hullámjelenséget alkosson. Azonban ez a hullám nem az elektromágneses diszperzív jelenség, hanem egy nemdiszperzív hullám, melynek felfutó homlokélét a térkomponens hozza létre, míg az elnyúló „farki” részt az idő komponens, ez éppen a **soliton impulzus**, amelynek egyik leglényegesebb tulajdonsága csillapítatlanságának csekély volta, azaz az igen nagy távolságok megtétele, annak ellenére, hogy a teljesítménye rendkívül kicsi.

Az anyagban terjedő elektromágneses hullám ugyanis minden esetben diszperziót mutat, aminek következtében a hullámcsomag szétfolyik (itt fontos megemlíteni, hogy a kvantummechanikai állapotfüggvény *Schrödinger* féle értelmezése is diszperziót mutat s ezért vetették el). Ez a hullámcsomag szétesés azonban nem feltétlen jelenség a diszperzitást mutató közegben, mivel bizonyos speciális esetben az elektromágneses jelenségek körében is létezik a diszperziót kompenzáló jelenség:

azaz létezik olyan jelenség, hogy a fázisebesség függ az intenzitástól, azaz valamilyen közegben terjedő elektromágneses hullámcsomag komponensei közül a nagyobb amplitúdójúak fázisebessége kisebb mint a kisebb amplitúdójuknak. Ezt az igen nagy stabilitás SZOLITON hullámcsomagok esetében észlelték, ahol a csomag stabilitását az intenzitástól s a hullámhossztól egyaránt függő futási idő méterek biztosították.

A fontos kérdés az, hogy ez a jelenség mennyire általános, s milyen mértékben igaz a gravitációs terekben terjedő hullámokra, továbbmenve mennyiben lehetséges, hogy a gravitonok is kvantáltak és mint elemi részek nagyfokú stabilitásuk illetve kisebbfokú csillapításuk a szoliton effektusnak köszönhető?

Elképzelhető-e hogy, a felvett *Gauss*-görbe eloszlás transzformáltjaként adódó gaussi impulzus, vagy egyéb spektrumánál felvehető-e olyan fázisgörbe, amely stabilizálni tudja a tér nemlinearitásán keresztül az eredeti térbeli konfigurációt?

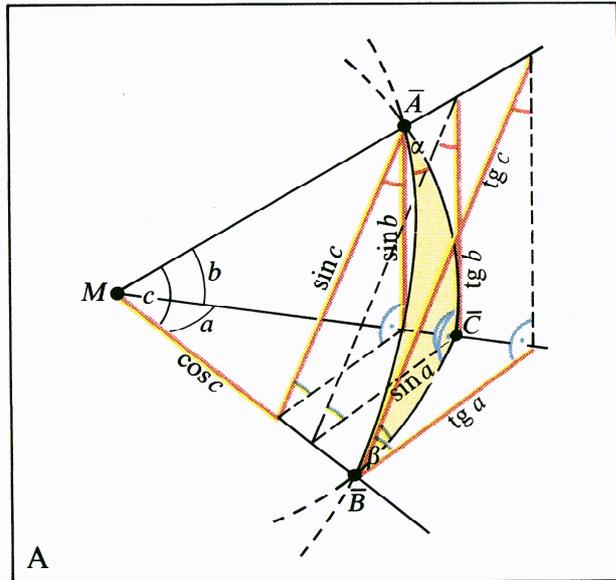
A fenti eloszlások a kvantum-részecskék térbeli eloszlására vonatkoznak, aminek következtében, az egyszerű alakmegfeleltetés nyomán a részecske szétfolyik az idő múlásával; ez azt jelentheti, hogy az exponenciális tag kitevőjét kell úgy korrigálni, hogy a szétterülés ne következzen be, de ez csak a transzformált formulában lehet végrehajtani.

A transzformáció, azért elengedhetetlen, mert az Univerzumban nincs nyugalmi rész, minden mozog. Ebben a mozgásban haladó nagy sebességű graviton-hullám állandóan változó **tér-idő-anyag kontinuumban** haladó gravitációs változás csak a folyamatos kovariáns transzformációval írható le. Ebből következik,

hogy a gravitációs változás-hullám fizikai jelenségéhez kell kapcsolni a **ds ívelemet** és a $(ds)^2 = 0$ ívelemnégyszetet, mivel ez nem más mint a gravitációs hullám terjedési egyenlete. Az Univerzum terében tárgyalt metrikus tenzor pedig nem más mint a gravitáció terjedésének metrikus paramétereinek tenzora. A gravitáció és a fény metrikus tenzorának azonossága azonban mindmáig nem bizonyított, ezért nem lehet az elektromágneses és a gravitációs jelenségek terjedési sebességét azonosnak tekinteni. (Ez lehet annak főoka, hogy a gravitációs hullámok kimutatása mindmáig nem sikerült.)

13.7.1. Kétdimenziós elliptikus transzformáció

A kétdimenziós elliptikus geometria makroméretekben a gömb modell. Ezen a modellen felvehető egy ortogonális koordinátahálózat, amelyen a kétdimenziós transzformáció végrehejajtható. A K_1 és a K_2 koordináta rendszerek origóját összekötő vektor v_{12} és a K_2 koordináta különbségi sebessége v_2 segítségével a transzformációs formulák kiszámíthatóak. A gömbön lévő koordináta hálózat és a K_2 -ben lévő P pont t_{2P} és x_{2P} adatokból a t_{1P} és x_{1P} transzformált pont paraméterei kiszámíthatóak.



Derékszögű háromszög

11. ábra. Gömfelületi derékszögű háromszög szögfüggvényei.

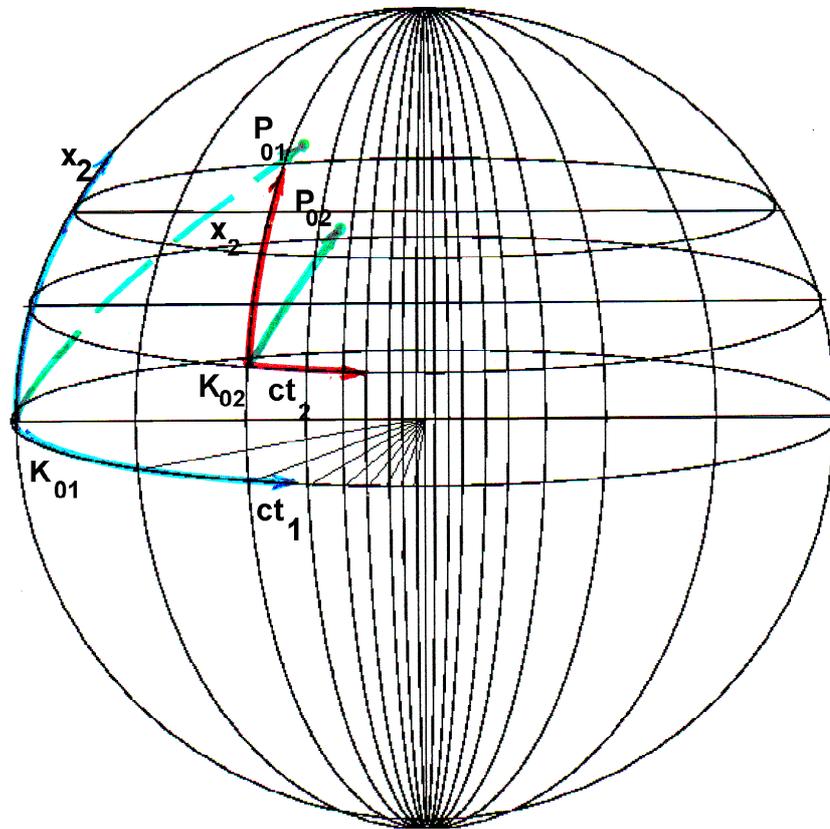
Derékszögű háromszög számítása a 11. ábra szerint:

$$\begin{aligned} \tan a &= \tan \alpha \sin b & \tan a &= \cos \beta \tan c \\ \tan b &= \tan \beta \sin a & \tan b &= \cos \alpha \tan c \\ \\ \sin a &= \sin \alpha \sin c & \sin b &= \sin \beta \sin c \\ \cos c &= \cos a \cos b & \cos c &= \cot \alpha \cot \beta \\ \cos \alpha &= \cos a \sin \beta & \cos \beta &= \cos b \sin \alpha \end{aligned}$$

Ebben a részben is, a már korábban használt módon, a vízszintes ordináta az idő ct egységeiben, míg a függőleges ordináta -merőleges az időre a félgömböt határoló főkörön - a távolság x a szokásos egységeiben.

Itt fontos megjegyezni, hogy nem mindegy melyik adatnak mi a dimenziója:

- A két póluson átmenő főkörök térdimenziójúak, azaz a megszokott formában „ x ” jellegű mennyiségek.
- A főköröket vízszintesen átmetsző — a pólusok felé zsugorodó körök — „idő” dimenziójúak „ $c_{gra}t$ ” jellegű mennyiségek.
- A vízszintes körök ívdarabjaihoz tartozó belső szögek elmozdulása és az idő „ $c_{gra}t$ ” hányadosai.
- A „ $\lambda_{gra} = \frac{\omega_{gra}}{c_{gra}}$ ” dimenziójúak, azaz a sebességre normált graviton hullámhossz.



Magyarázat: kék színű K_{01} , piros színű K_{02} , zöld színű a transzformálandó pont és annak helyvektora, szaggatott zöld a transzformált pont és helyvektor.

A $K_{10} - t_{10} - x_{10} - K_{20}$ által alkotott derékszögű háromszög háromszög átfogója pedig a v_{12} vektor abszolút értéke, míg a t tengellyel bezárt szöge a forgatási szög α . A forgató-transzformáló vektor tehát:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_T &= |\mathbf{S}_T| e^{i \arctan(\tan \alpha) = i \frac{\tan a_1}{\sin b_1}} \\
 \mathbf{S}_T &= |\mathbf{S}_T| e^{i\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= t_{10} \\ b_1 &= x_{10} \end{aligned}$$

A transzformáció változó nagyságát az abszolút érték adja ez a v_{12} vektor hossza, amely nem egyéngnyi gömbön:

$$|\mathbf{S}_T| = R \cos c_T$$

Egységnyi gömbön:

$$|\mathbf{S}_T| = \cos c = \cos a \cos b$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\tan a}{\sin b} \\ \alpha &= \arctan \frac{\tan a}{\sin b} \end{aligned}$$

A transzformáció forgatási részét az exponenciális tag adja, amely egyben egységvektor:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \text{ha} \quad \alpha = \arctan(\tan \alpha) = \arctan \frac{\tan a}{\sin b}$$

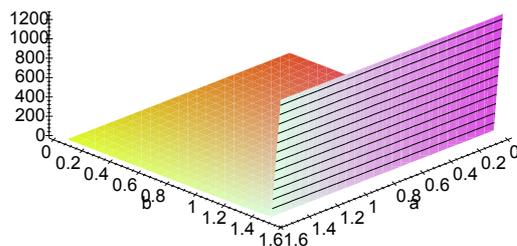
A transzformáló vektor:

$$\mathbf{S}_{Te} = |\mathbf{S}_T| e^{i \arctan \alpha} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos c} = \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a}{\sin b})}{\cos a \cos b} + i \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a}{\sin b})}{\cos a \cos b}$$

A transzformáló egységvektor komponensei:

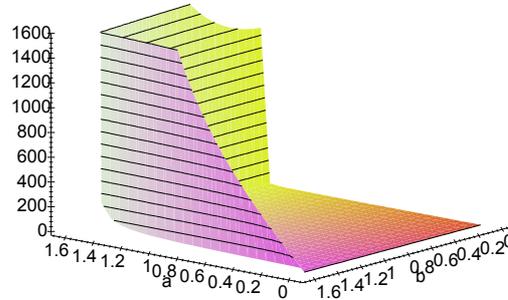
$$\begin{aligned} \operatorname{Re} e^{i\alpha} &= \cos \alpha = \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a}{\sin b})}{\cos a \cos b} \\ \operatorname{Im} e^{i\alpha} &= \sin \alpha = \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a}{\sin b})}{\cos a \cos b} \end{aligned}$$

$$\frac{\cos(\arctan \frac{\tan a}{\sin b})}{\cos a \cos b}$$



A transzformáló vektor valós részének térbeli képe.

$$\frac{\sin(\arctan \frac{\tan a}{\sin b})}{\cos a \cos b}$$



A transzformáló vektor képzetes részének térbeli képe.

A transzformáló vektor az egységömbön:

$$\mathbf{S}_{egT1} = \frac{\mathbf{S}_{T1}}{|\mathbf{S}_T|} = \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_1}{\sin b_1})}{\cos a_1 \cos b_1} + \mathbf{i} \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a_1}{\sin b_1})}{\cos a_1 \cos b_1}$$

$$\mathbf{S}_T = \frac{\mathbf{S}_T}{|\mathbf{S}_T|} = \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_1}{\sin b_1})}{\cos a_1 * \cos b_1} + \mathbf{i} \frac{\sin a_1 / \sin c_1}{\cos a_1 * \cos b_1}$$

A transzformálandó vektor egységömbön:

$$\mathbf{S}_2 = \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2} + \mathbf{i} \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2}$$

$$\text{Re } \mathbf{S}_2 = \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2}$$

$$\text{Im } \mathbf{S}_2 = \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2}$$

$$t_2 = \text{Re } \mathbf{S}_2 = \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2}$$

$$x_2 = \text{Im } \mathbf{S}_2 = \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2}$$

$$R = \cos a_2 \sin b_2 \quad \alpha_2 = \arctan\left(\frac{\tan a_2}{\sin b_2}\right)$$

$$t_2 = a_2$$

$$x_2 = b_2$$

A transzformált vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_T * \mathbf{S}_2 &= \mathbf{S}_1 = \operatorname{Re} \mathbf{S}_1 - \operatorname{Im} \mathbf{S}_1 \\ \operatorname{Re} \mathbf{S}_1 &= \operatorname{Re} \mathbf{S}_T * \operatorname{Re} \mathbf{S}_2 - \operatorname{Im} \mathbf{S}_T * \operatorname{Im} \mathbf{S}_2 \\ \operatorname{Im} \mathbf{S}_T &= -(\operatorname{Re} \mathbf{S}_T * \operatorname{Im} \mathbf{S}_2 + \operatorname{Im} \mathbf{S}_T * \operatorname{Re} \mathbf{S}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathbf{S}_1 &= \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_1}{\sin b_1})}{\cos a_1 * \cos b_1} * \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2} \\ &\quad - \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a_1}{\sin b_1})}{\cos a_1 \cos b_1} * \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2} \\ \operatorname{Im} \mathbf{S}_T &= \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_1}{\sin b_1})}{\cos a_1 \cos b_1} * \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2} + \\ &\quad + \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a_1}{\sin b_1})}{\cos a_1 \cos b_1} * \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2} \end{aligned}$$

A numerikus transzformáció kiinduló adatai:

$$\boxed{K_{02} \text{ koordinátái : } a_1 = 0.3, b_1 = 0.2}$$

$$\boxed{P_{02} \text{ koordinátái : } a_2 = 0.2, b_2 = 0.15}$$

A transzformált $P_{02} \Rightarrow P_{01}$ pont reális része:

$$\left[\frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_1}{\sin b_1})}{\cos a_1 * \cos b_1} * \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2} - \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a_1}{\sin b_1})}{\cos a_1 \cos b_1} * \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2} \right]$$

$$\left[\frac{\cos(\arctan \frac{\tan(.3)}{\sin(.2)})}{\cos(.3)*\cos(.2)} * \frac{\cos(\arctan \frac{\tan(.2)}{\sin(.15)})}{\cos(.2) \cos(.15)} - \frac{\sin(\arctan \frac{\tan(.3)}{\sin(.2)})}{\cos(.3) \cos(.2)} * \frac{\sin(\arctan \frac{\tan(.2)}{\sin(.15)})}{\cos(.2) \cos(.15)} \right]$$

$$\boxed{\operatorname{Re} P_{01} = -0.39303}$$

A transzformált $P_{02} \Rightarrow P_{01}$ pont képzetes része:

$$\left[\frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_1}{\sin b_1})}{\cos a_1 \cos b_1} * \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2} + \frac{\sin(\arctan \frac{\tan a_1}{\sin b_1})}{\cos a_1 \cos b_1} * \frac{\cos(\arctan \frac{\tan a_2}{\sin b_2})}{\cos a_2 \cos b_2} \right]$$

$$\left[\frac{\cos(\arctan \frac{\tan(.3)}{\sin(.2)})}{\cos(.3) \cos(.2)} * .61233 + \frac{\sin(\arctan \frac{\tan(.3)}{\sin(.2)})}{\cos(.3) \cos(.2)} * \frac{\cos(\arctan \frac{\tan(.2)}{\sin(.15)})}{\cos(.2) \cos(.15)} \right]$$

$$\boxed{\operatorname{Im} P_{01} = 1.0297}$$

A transzformált P_{01} pont koordinátái:

$$\boxed{\mathbf{P}_{01} = -0.39303 + \mathbf{i} * 1.1297}$$

14. fejezet

Relativitás és rakétarepülés

14.0.2. *Repülés az Univerzumban*

Az Univerzumban történő repülésnek jelenleg két komoly problémája van, az egyik a hajtómű és a hajtóanyag, a másik a Galaxisban történő repülés, ez másképpen a Tejútrendszerben való repülés bolygórendszerrel bolygórendszerre. Figyelembe véve, hogy Galaxisunk körülbelül 100 milliárd Napot tartalmaz, valójában az űrhajók egész flottájára lesz szükség, ha csak nagyjából is meg kívánjuk ismerni. A másik a további Galaxisokhoz való eljutás ez sokkal nagyobb és fejlettebb űrhajókat igényel, de az általunk elképzelhető időn belül csak néhányat.

Ami a hajtóanyag problémáját illeti itt csak egyetlen dolog realitása lehetséges, az annihiláció, amelyhez alapvető a megfelelő antianyag előállítása, ez tudományosan már előrehaladottabb állapotban van, a CERN-ben ugyanis ütköző sugárak révén antiprotonokat már állítottak elő és a tárolását is megoldották mágneses palackokkal, amelyekbe pozitronokat bevívve antihidrogén atomokat nyertek. Persze ez még csak a kezdet, mert az annihiláció során nyerhető elektromágneses sugárzásnak el kell érni a röntgen sugárzás frekvenciatartományát és további jelentős nehézség okozója lehet. De mindennek ellenére azt mondhatjuk, hogy a galaktikus repülés már a látókörünkbe került. Ezért érdemes vele bővebben is foglalkozni.

A galaxisok közti repülés figyelembevételével a köztük lévő óriás távolságokat és a sötét anyag-energia kölcsönhatását, még sok előzetes ismeretet kíván, amelyeket azonban a Galaxisunkban történő repülés során részben meg tudjuk szerezni.

14.0.3. *Digitális és analóg transzformációk*

A speciális relativitás és az általános relativitás elméletének megszületése és általános elfogadása után:

1. Célszerű meghatározni a relativitás elméletének alapvető gondolatát: ez abban foglalható össze, hogy a vizsgált K_1 és K_2 koordináta-rendszerek között, mind a tér mind az idő és a sebesség vonatkozásában különbség van. Ezek a különbségek nem állandóak, ha a két rendszer sebességei változnak. Az általános eljárás az, hogy az egyik – többnyire a K_1 – rendszert el szokták nevezni laboratóriumi illetve nyugalmi rendszernek és hozzá képest mozgó K_2 rendszerben lévő (legegyszerűbb esetben) pont téridő és egyéb paramétereit transzformálják a nyugalmi rendszerbe. Ezt a formulát először Lorentz dolgozta ki, majd Einstein dolgozta ki először az elektrodinamikára, később az akkori fizikai ismeretekre *speciális relativitás* néven. Azonban az *Einstein-féle transzformációt* kétféle képpen is végre lehet hajtani, mégpedig a teljes sebességkülönbséget

infinitézimális lépcsőkben transzformáció sorozattal, másrészt egyetlen lépcsős transzformációval. A két módszer közti végeredmény jelentős különbséggel jár. Az erről készült számítások és ábrák könnyen kiszámíthatók.

2. Azonban van még egy fontos probléma, a viszonyítási alaphoz választott koordináta-rendszer természetesen, csupán szubjektív alapon tekinthető zérus vagy bár-mekkora zérustól eltérő sebességűnek, ennek következtében a transzformáció eredménye igen sokféle lehet, és ez azt jelenti, hogy a transzformációs formulák bizonytalan végeredménye következtében „a levegőben” lógnak.
3. Így a rakétarepülés ami folyamatos gyosulással bármilyen sebességet elérhet, mivel nincs meghatározva a zérus sebességű pontja. *Einstein* egész egyszerűen a Földet tekintette a zérus sebességű pontnak, esetleg egy laboratóriumot a térben, ami végül is hamis eredményeket hozott. Ez az egykori Föld középponti *Arisztotelész által* alkotott világszemléletre emlékeztet.

Tehát felül kell vizsgálni a nagysebességű mozgásokra vonatkozó elméletet:

Ezek egyike volt a rakétarepülésre vonatkozó elmélet. Ezt klasszikus formában Ciolkovszkij dolgozta ki és róla nevezték el a rakéta végsebességét és induló tömegét (kémiai hajtás esetén) összekapcsoló egyenletet Ciolkovszkij-egyenletnek. Ez a formula és a kapcsolódó elmélet nem tartalmazott a sebességre vonatkozó semmiféle korlátozást:

„...A változó tömegű testek közül a rakétáknak van a legnagyobb jelentőségük. A rakéta működési elve, mint ismeretes a következő: a rakéta tömegének (üzemanyagkészletének)* egy részét hátrafelé és a kilöveléskor visszalökő erő hajtja előre a rakétát.

Jelölje t időpontban a rakéta össztömegét $m(t)$ és sebességét $v(t)$. A rakéta dt idő alatt $(-dm)$ tömeget lövell ki hátrafelé, mely a rakétához képest u sebességgel mozog, tehát u a rakétahajtómű által megszabott állandó kilövelési sebesség. A kilövelt $(-dm)$ tömeg a nyugvó inerciarendszerhez képest $u-v$ sebességgel (!) mozog a rakétával ellentétes irányban, impulzusa tehát $(-dm)(u-v)$. A kilövelt anyag egységnyi idő alatt $\frac{dm}{dt}(v-u)$ impulzust kap a hajtóműtől, ekkora erő hat a kilövelt a kilövelt anyagra. *Newton* harmadik axiómája szerint ugyanekkora erő hat a rakétára is, de ellentétes irányban, azaz a rakéta haladási irányában a (3.5) axióma[†] a rakétamozgásra tehát a következő összefüggést adja:

$$\frac{dm}{dt}(v-u) = \frac{d(mv)}{dt}$$

A jobboldalon a szorzat differenciálás szabályát alkalmazva és m -el osztva kapjuk, hogy

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

*impulzusösszegének

[†]A 3.5 axióma $K = \frac{d(mv)}{dt}$ ahol K az erő.

Integráljuk ezt az egyenletet az idő szerint a rakéta indításának t_0 időpillanatától a t időig:

$$-u \ln \left(\frac{m(t)}{m(t_0)} \right) = v(t) - v(t_0) \quad ((1.15.1))$$

A rakétasebessége az indítás pillanatában legyen $v(t_0) = 0$. Minthogy $m(t_0)$ a rakéta induló tömegét jelenti $m(t_0) = M$, ebben a teljes üzemanyagmennyiség is bennefoglaltatik. Legyen most t az az időpillanat, amikor a teljes üzemanyagkészlet elfogy, tehát a rakétahajtóművek leállnak, $v(t)$ ekkor a rakéta végsebességével, $m(t)$ pedig a rakéta üzemanyagnélküli hasznos tömegével, m -mel lesz egyenlő. 15.1 szerint

$$v = u \ln \frac{M}{m}$$

vagy

$$M = me^{v/u} \quad ((1.15.2))$$

Ezt az egyenletet *Ciolkovszkij egyenletnek* nevezzük....”

([60]Gombás-Kisdi: Bevezetés az elméleti fizikába. I. 78-79.o. Akadémiai Kiadó, Budapest 1971.)

A fenti idézetben feltűnik az a tény, amelyre alapvetően támaszkodik a levezetés gondolatmenete:

„A kilövelt ($-dm$) tömeg a nyugvó inerciarendszerhez képest $u-v$ sebességgel (!) mozog a rakétával ellentétes irányban, impulzusa tehát $(-dm)(u-v)$.”

Azaz a rakéta sebessége kiszámításának alapfeltétele, hogy a rakéta és a nyugvó-inerciarendszer \rightarrow Föld között az információáram állandó értékű maradjon. Ez azért olyan lényeges és alapvető jelentőségű, mivel a rakétában minden változatlanul folyik (a saját idő nem változik), azaz a gyorsulás állandó a gáz sugar állandó sebességgel áramlik ki stb. (Bizonyos állandó gyorsulást, azért joggal feltételeznek, mivel a rakéta össztömege ellenőrizhető módon folyamatosan csökken.) Az ultrarelativisztikus közeli helyzetben, a speciális relativitás elmélete alapján, azonban a rakéta sebességének növekedése nyomán a kilövelt hajtóanyag sebessége változik –csökken– a tömege pedig nő (Impulzusa nagyjából állandó). Ennek korrigálása azonban csak a Földhöz rögzített koordináta rendszerbeli paraméterek ismeretében lehetséges.

Mindennek következtében tehát a rakéta és Föld közti állandó információ-áramlás döntő fontosságú, ha a rakéta sebességét az FKR-ben (földi-koordináta-rendszerben) számítjuk ki. Ez az információ áramlás természetesen elektro-mágneses-hullámok segítségével folyik, ahol az információ átvitel állandóságának feltétele a relatív sáv szélesség állandósága.

Belép azonban jelentős nehézséget okozva az állandóan növekvő sebesség következményeként a Doppler - effektus. A Doppler - effektus nagysága Galilei; Minkowski és Euklidesz geometria és transzformáció esetén egyaránt meghatározható:

GALILEI-GEOMETRIA:

v merőleges a kommunikációs adás irányára doppler-effektusa:

$$\Delta\omega = 1 - v/c \quad (14.1)$$

v azonos irányú a kommunikációs adás irányával doppler-effektusa:

$$\Delta\omega = 1 \mp v/c_0$$

MINKOWSKI-GEOMETRIA:

v merőleges a kommunikációs adás irányára doppler-effektusa:

$$\Delta\omega = \frac{1/c_0^2 - (v/c_0^3)(1 - v^2/c_0^2)}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

v azonos irányú a kommunikációs adás irányával doppler-effektusa:

$$\Delta\omega = \frac{1 \mp v/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

EUKLIDESZ-GEOMETRIA:

v merőleges a kommunikációs adás irányára doppler-effektusa:

$$\Delta\omega = \frac{1/c_0^2 - (v/c_0^3)(1 - v^2/c_0^2)}{\sqrt{1 + v^2/c_0^2}}$$

v azonos irányú a kommunikációs adás irányával doppler effektusa:

$$\Delta\omega = \frac{1 \mp v/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

A Doppler-effektus számított grafikus ábráiból azonnal következik, hogy a fénysebesség értékéig növekvő sebességű távolodás esetén növekvő nagyságú vöröseltolódás lép fel, azaz a mért spektrum eltolódás értéke állandóan nő, míg „ $v = c$ ” esetén a vett spektrum értéke azonosan zérus, azaz ekkor információ nem nyerhető. Ha viszont „ $v > c$ ” reláció lép fel a frekvencia negatív, de növekvő értéket mutat, ami a spektrumméréseknél csak akkor lenne kimutatható, ha fázisspektrum mérésre is lenne lehetőség. Ilyen azonban nincs, ezért a „ c ”-nél nagyobb sebességgel távolodó csillagrendszerek egyre közelebbinek mérhetők a doppler effektus alapján.

Azaz olyan világképet kapunk, amely egy sokmilliárd fényév sugarú nagyságú gömb, de a gömbön belül egyaránt érzékeljük a „közeli és távoli világot” és a gömb határát a nem észlelhető $v = c$ sebességű galaktikus testek illetve a rakéta alkotják. Ez végül is egy véges, zártfelületű világegyetem létezését sugalja. **Meg kell jegyezni, hogy mivel a Föld is viszonylag nagy sebességgel mozog az Univerzumban: Naprendszer + Tejútrendszer + Galaxishalmaz. A földi csillagászati megfigyelésnél is érvényesül a fentebb leírt effektus. Ami jelentősen módosítja az Univerzum szerkezetét.**

Mindezt az zavarja meg, hogy a galaktikus gravitációs tér, amely bármilyen gyenge, de a repülés irányának változása révén vörös és ibolya eltolódást egyaránt okozhat a rakéta és a Föld adói számára, és szimmetriája semmiképpen nem bizonyított a teljes galaktikus útra. Azaz a vöröseltolódás eredete nem feltétlenül a távolodás sebességének mértéke, lehetséges a közbenső összes gravitációs és a sötét anyag-energia tömeg nagyságának mértéke is. Ebben az esetben a világegyetem változó módon tágul, csupán a jelenlegi spektrumindikációs módszereink elégtelenek a valóság megállapítására.

Az effektus következménye az, hogy a vételi oldalon (a rakétában és Földön egyaránt) megváltozott frekvenciájú vivőt (feltehetőleg vörös eltolódást) és ennek arányában megváltozott sáv szélességű információ érzékelhető. Az információ mennyisége pedig arányos a sáv szélességgel, tehát megváltozik a beérkező információ is (feltehetőleg csökken). Mivel az információ nem más mint egy időtaktus, ez a taktus lassulásaként jelentkezik. Azaz a földi észlelés a rakéta órájának lassulását fogja érzékelni, amit közölnek is a rakétával. Ha ehhez a földi vezérlőjelhez szinkronizálják a rakéta hajtóművét úgy annak fokozatosan nőni fog a teljesítménye, vagyis a rakéta névleges gyorsulása állandó marad, mivel növekedik a tömege. Ezek a jelenségek azt követelik meg, hogy a kisugárzott információ mindenkor azonos nagyságú legyen, azaz a doppler-effektust kompenzálni kell az adás sáv szélességének növelésével, leggyorsabban oly módon, hogy a vivőfrekvenciát növelve a relatív sáv szélességet állandó értéken kell tartani. Azonban a növekvő sáv szélesség rontja az jel/zaj viszonyt, ennek ellensúlyozására az adóteljesítmény arányos növelése szükséges. (Persze a valóságos helyzet ennél rosszabb, mivel a távolság növekedésével az antennanyalábolás és az irányítás is jelentősen romlik és további zajnövekedést eredményez ami újra csak az adóteljesítmény növelését igényli.)

Már egyszerű becsléssel is megállapítható, hogy:

Ha a rakéta közel fénysebességgel távolodik a rajta lévő (pusztán a földi koordinátákban kiszámításhoz szükséges) „navigációs adó igen *nagy frekvencián és rendkívül nagy sáv szélességgel kell, hogy* működjön és ezért az általa felhasznált teljesítmény hallatlanul megnövekszik. Végző soron ha $v \geq c$ eset bekövetkezik túllépi a rakétahajtómű teljesítményét is: vegyük azt az ésszerű határokon belül bármilyen nagyra.

Ez a jelenség minden körülmények közt bekövetkezne, ha a rakétában fizikai jelenség lenne az idő lelassulása a földi időhöz viszonyítva.

Mindez azt jelenti, hogy ragaszkodásunk a Földhöz rögzített koordináta-rendszerhez, azt eredményezi, hogy a rakéta valóban nem lépheti túl a fénysebességet, mivel a méréshez szükséges információ teljesítmény-igénye, ezt mindenképpen meggátolja.

Felmerül a kérdés szükség van-e erre az információs kapcsolatra: **nyilvánvalóan nincs**, mivel hiánya csupán azzal a következménnyel jár, hogy a rakétán nem fogják tudni milyen Föld-i észlelésű sebességgel haladnak, sőt azt sem fogják tudni ha már túllépték a földi fénysebességet. Természetesen a Földön sem fogják tudni, azonban ez semmiben sem fogja gátolni a rakéta mozgását. Magától értetődő, hogy más mérési módszerrel a rakétán, mérni tudják a rakéta sebességét: egy meghatározott-célirányban lévő csillag földi doppler vöröseltolódása fokozatosan csökken majd esetleg ibolya eltolódásba megy át, azonban ezt a Földdel közölni nem tudják. Megjegyzendő, hogy a Lorentz-transzformáció is erre az eredményre vezet csak a mértéke lesz eltérő.

Következtetések:

1. A speciális relativitás elméletéhez való következetes alkalmazkodás a "természetes szinkronizáció" követelményeinek teljesítése ha $v \approx c$ a *Ciolkovszkij-egyenlet szerint* mind az *Euklidesz-i*, mind a *Minkowski-i* geometriában vizsgálva végtelen teljesítményt igényel. A rakéta energetikai korlátozottsága következtében ez a feltétel teljesíthetetlen, mivel elvonja a hajtómű energiáját és ezzel a gyorsítás lehetőségét megszünteti. Mindez egyáltalán nem tekinthető ésszerű eljárásnak.

2. A rakéta időmértékének folyamatos befolyásolása a Földről (a szinkronizáció), a doppler effektus következtében, az idő lassulása miatt, a kilövelt hajtóanyag csökkenését eredményezi; eközben a sajátidőhöz történő ragaszkodás azt mutatná ki, hogy a hajtóanyag térfogata idő előtt gyorsuló ütemben fogy. (A Földről érkező időtaktus lelassulása és a sajátidő szerinti hajtóművezérlés, a hajtómű működésének rendkívüli gyorsulását és a rakéta gyorsulásának mértéktelen növekedését mutatná.) Külön vizsgálódás tárgyát képezhetné az a tény, hogy miközben az időtaktus lassul, a rakéta maradék tömege ugyanolyan arányban nő, ami a kilövelt hajtóanyag impulzusának növekedését jelentené, egyidejűleg a sebesség növekedés lassítaná a hajtóanyagimpulzus növekedését.
3. A fenti tanulságokat figyelembevéve önként adódó következtetés, hogy a speciális relativitás elmélete ott alkalmazandó és alkalmazható, ahol a megfigyelő és a mozgó test koordinátarendszerei közt az elektromágneses kölcsönhatás illetve információátvitel kikerülhetetlenül jelen van, vagy az elengedhetetlenül szükséges. Ha az elektromágneses kölcsönhatása két eltérő sebességű koordinátarendszer között nem szükségszerű, megszűnik (elenyészik) vagy megszüntethető, és ez érdemi hátránnyal nem jár: a speciális relativitás elmélete oktan korlátozást jelent ezért alkalmazása helytelen. A rakétamozgás prototipusa az ilyen mozgásformáknak.

Megjegyzés:

Tételezzük fel, hogy a száguldó rakétán pusztán a v_R sebesség növekedése következtében objektív okok miatt az atomi folyamatok is lassulni fognak, s így az általuk vezérelt kommunikációs adó frekvenciája csökkenni fog (miközben sajátidőként az eredetit mutatják), ez a frekvencia azonban a kijelzések szerint megegyezik az eredetivel. Ez az alacsonyabb frekvencia sugárzódik a Föld felé, ami tovább csökken a doppler-effektus következtében. Ugyanekkor a Föld-sugárzó adó doppler-effektussal csökkenő frekvenciája, a rakétán lévő órák objektív lassulása miatt, a földi adás doppler eltolódását csak csekély vagy semmilyen mértékben nem észlelnék. (Ne feledjük el, hogy a Doppler-effektus a vett frekvencia és a helyi frekvenciamérés tényleges végrehajtása során indikálódik.)

14.1. RAKÉTAREPÜLÉS A MINKOWSKI TÉRBEN

14.1.1. Egy egyszerű számítás

„Legyen a (nyugalomban lévőknek tekintett)[‡] Földhöz kapcsolt inerciarendszer K . Ebben a rakéta sebessége t időben $v(t)$. A rakéta összes nyugalmi tömege $m_0(t)$, rakétahajtómű által megszabott kilövelési sebesség $-u$. (A negatív előjel azt jelenti, hogy a kilövelés a rakéta mozgásával ellentétes irányú.) A kilövelés sebessége a Föld K koordinátarendszeréből nézve az (5.16) sebességösszetevési formula adja meg

$$w = \frac{v - u}{1 - uv/c} \quad ((6.8.1))$$

[‡]A Föld mint nyugalmi rendszer durva elhanyagolás, mivel a Naprendszer, melynek része mintegy 400 km sebességgel halad, mégha a galaxisunkat nyugalmi rendszernek tekintjük akkor is.

Ennek figyelembevételével az (1.15.1.) mozgásegyenlet reletivisztikus megfelelője a következő lesz:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{dm_0}{dt} \frac{w}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \quad ((6.8.2.))$$

Itt dm_0 a dt idő alatt kidobott tömeget jelöli, mely a nyugalmi tömeg változásával a tömegnövekedési formula szerinti összefüggésben van:

$$dm_0 = \frac{dm'_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad ((6.8.3.))$$

A(8.1), (8.2), és (.3) egyenletekből kiindulva a *Ciolkovszkij*-egyenlet helyett a következő végeredményt kapjuk:

$$M_0 = m_0 \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right)^{\frac{c}{2u}} \quad ((6.8.4))$$

ahol M_0 a rakéta nyugalmi tömege az indításkor, m_0 pedig a hasznos teher tömege.

Fenti eredményünk a $v/c \ll 1$ és $u/c \ll 1$ nemrelativisztikus határesetben átmegy az (1.15.3) *Ciolkovszkij egyenletbe*[§]. Ugyanakkor az is látható, hogy véges m_0 tömegnek a $v = c$ fénysebességre való felgyorsítása csak $M_0 = \infty$ indítási tömeggel volna lehetséges.

Érdekes eredményre vezet (8.4) képletünk az $u = c$ esetben, tehát ha a hajtómű fénysebességgel löveli ki az üzemanyagot. Ez csak úgy képzelhető el, ha az anyagkidobást egyirányú fénykisugárzással valósítjuk meg. Az ilyen elven működő rakétát *fotonrakétának* nevezzük. A fotonrakéta v sebességre való felgyorsításához szükséges indító tömeg

$$M_0 = m_0 = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad ((6.8.5))$$

Ez jelenti az ideális leggazdaságosabb üzemanyagfelhasználást. Ha pl. csak a $v = 11.2 \text{ kms}^{-1}$ második kozmikus sebesség elérésére törekednénk, akkor $v/c \approx 4 \cdot 10^{-5}$ s $M_0 \approx m_0(1 + 10^{-5}) = 1.00004 m_0$, tehát az indítási tömegnek csak négy százezredrésszel kell nagyobbak lennie, mint a hasznos tömeg. Fotonrakétával a fénysebesség megközelítése is könnyen elképzelhető. Pl.:

$v = \frac{9}{11}c = 0.82c$ eléréséhez $M_0 = \sqrt{10}m_0 = 3.16 m_0$ szükséges, tehát ha egy fotonrakéta tömegének kétharmadát fény formájában reflektorszerűen kisugározza, úgy sebessége a fénysebesség 82 %-át érné el. Ezzel a legközelebbi állósillagokra való utazás egy évtizeden belül megvalósítható lenne. Sokan úgy vélik, hogy a csillagok közti utazás feltétele a fotonrakéta megvalósítása.”

([61]Gombás-Kisdi: Bevezetés az elméleti fizika I. 322-323.oldal. Akadémia Kiadó,Budapest, 1971.)

[§]Colkovszkij egyenlet: $M = m^{v/u}$

Itt is megfigyelhető, hogy az egész levezetés kulcsfontosságú része:

A speciális relativitás elvének beépítése, rögzített, merev koordináta-rendszer bevezetésével jár, melynek zéruspontja a Föld. Azaz a rakéta és a kiáramló hajtóanyag mindig a földi paraméterekben kerülnek kiszámításra.

Annak ellenére, hogy ez a szemléletmód és követelmény teljesen természetesnek tűnik, mégsem az:

Megköveteli ugyanis, hogy valamilyen formában, folyamatosan a rakéta aktuális sebességének mérését a viszonyítási ponthoz - Födhöz - képest, mivel ennek hiányában nincs mód a rakétaparaméterek kiszámítására. Ez alapvetően azért szükséges, mivel az időméréshez a „természetes szinkronizációval” szükséges a földi és a rakétabeli órák összehangolása. (Nem szabad elfelejteni, hogy a növekvő sebesség esetén a relativitás elmélet szerint rakétabeli órák lelassulnak.) Az összehangolásra pedig az egyetlen lehetőség a zéruspont-Föld és a gyorsuló rakéta közt fenn kell tartani az információs kapcsolatot. A rakéta mint állandóan gyorsuló rendszer, a relatív sebességének ismerete szükséges, a kiáramló gáz sugar relatív impulzusának kiszámításához, ami a rakétahajtómű vezérlésének, a gyorsulás kiszámításának és a tömegviszonyok figyelembevételének alapfeltétele.

Mindennek alapfeltétele, hogy a rakéta és a Föld között az információáram állandó értékű maradjon. Ez azért olyan lényeges és alapvető jelentőségű, mivel a rakétában minden változatlanul folyik (a saját idő nem változik), azaz a gyorsulás állandó a gáz sugar-fénysugar állandó sebességgel áramlik ki stb. (Bizonyos állandó gyorsulást, azért joggal feltételeznek, mivel a rakéta össztömege ellenőrizhető módon folyamatosan csökken.) A speciális relativitás elmélete alapján, azonban a rakéta sebességének növekedése nyomán a kilövelt hajtóanyag sebessége változik -csökken- a tömege pedig nő (Impulzusa állandó). Ennek korrigálása azonban csak a Földhöz rögzített kordináta rendszerbeli paraméterek ismeretében lehetséges. Mindennek következtében tehát a rakéta és Föld közti állandó információáramlás döntő fontosságú, ha a rakéta sebességét az FKR-ben (földi-kordináta-rendszerben) számítjuk ki. Ez az információ áramlás természetesen elektromágneses-hullámok segítségével folyik, ahol az információ átvitel állandóságának feltétele a relatív sáv szélesség állandósága.

Hogy nagy sebességgel rövid életű képződmények is hosszú utat tehetnek meg, azt a megfigyelés teljes mértékben igazolja Gyorsan bomló részek sokkal hosszabb pályát futnak be, mint amennyi földi nyugalomban mért élettartamuknak és a fénysebességnek a szorzata. A kozmikus sugárzás által kiváltott müonok 30 km magaságból eljutnak a tengerszintre, noha nyugalmi élettartamuk mindössze 2.10 sec. Ezt a jelenséget gyakran úgy értelmezik, hogy az űrhajón "lelassul" az órák járása (a homokóraké csak úgy, mint az atomóraké) de óvatosan hozzátesszük: lehet, hogy az életműködésekre ez a lelassulás nem vonatkozik. Ez a felfogás azonban ellentmond a relativitáselmélet alaptörvényeinek. Valójában a Földön ugyanolyan gyorsan telik az idő a földlakó számára, mint az űrhajón az asztronautáknak. Ez azt jelenti, hogy a Földön az ingaóra, az atomi rezgés, a szívverés és minden más folyamat ritmusaránya ugyanaz az érték, mint az űrhajón végbemenő azonos folyamatoké.

Ha az űrakettyegés szaporasága a szivveréshez képest menetközben lecsökkenne, ez objektív mértéke volna az űrhajó abszolút sebességének és a maximális viszonyszám kitüntetné az abszolút nyugalmat. Ez pedig nem létezik.

Hasonló a magyarázata a relativisztikus időkülönbségnek. A relativitáselmélet mutatott rá arra, hogy a természetben lejátszódó események színtere a négydimenziós (x,y,z,t) világ és ebben az utazási idő nem a kezdő és végesemény által meghatározott abszolút, hanem a mozgás világvonalától függő mennyiség a fizikában. Ha az űrhajó mozgását téridőben szemléljük, észrevehető eltérést találunk a Föld egyenes világvonalától. Az induláskor, forduláskor és érkezéskor bekövetkezett gyorsulás objektíven megkülönbözteti az asztronautát Földön maradt ikereststvéretől. A földi ember tehetetlenségi mozgást végzett. A két iker tehát fizikai szempontból nem egyenrangú s ezért van az, hogy az asztronauta iker kitüntető módon kevesebbet öregedett. A kitüntetettség a gyorsulási periódusok objektíven jelezték számára, végső soron ennek köszönhette fiatalon maradását is, noha a gyorsulási periódusok a sokéves utazási időből csak néhány napot tettek ki és hogy az időeltérés kiszámításánál a világvonal egyenes szakaszaira érvényes Lorentz-transzformációs képleteket alkalmaztuk az egyenesekre érvényes trigonometriát.

Általánosan ismert a fenti ugynevezett ikerparadoxon, azaz a gyorsuláson áteső biológiai szervezet számára lassabban múlik az idő, és ennek következménye az ikerparadoxon. Erről rendkívül sokat írtak és bizonyításával szinte megbéklyózták, az emberiség tevékenységét a csillagközi térbe történő kijutás érdekében. A másik ilyen, mondhatni erőteljes érvelés az ugynevezett SAGNAC kísérlettel kapcsolatos.

Ebben mint ismeretes, egy nagyszámú tükrökből álló köralakú pályán egymással szemben fénysugarakat futtatnak körbe miközben a tükrökből álló rendszer egésze jelentős szögsebességgel forog. Az elvégzett kísérlet azt mutatta, hogy a két ellentétes irányba indított fénysugár interferencia csíkjai eltolódtak. Ebből a korabeli fizikusok egyrésze azt a következtetést vonták le, hogy a Föld translációs sebessége igenis kimutatható, míg mások arra az álláspontra helyezkedtek, hogy ez a kísérlet nem inerciális, hanem gyorsuló rendszerben végezték s így a fénysebesség megváltozása természetes, de nem ellentétes a speciális relativitás elveivel.

Természetesen, itt komoly ellentétet lehet az iker paradoxonnal kapcsolatban felfedni, ugyanis ha a gyorsuló térben a fénysebesség állandósága, már nem igaz, vagy másképp fogalmazva a gyorsulásból eredő sebességtöbblet vagy hiány a fénysebességet növeli illetve csökkenti akkor az idő lelassulása nem következik be (az időlelassulás formulájában keletkező negatív érték, mint elsőfajú hiperkomplex szám negatív abszolút értéket - ami másodfajú szám -is felvehet) aminek következtében az időlelassulás asszimmetrikus hatása elvész és az idő a rakétában ugyanolyan módon telik mint a a Földön és az ikerparadoxon nem következik be.

Mindehhez még az is hozzátartozik, hogy a rakétában lévő belső módon nem képesek saját sebességüket megállapítani, ennek következtében az idő múlásának üteme sem állapítható meg, ugyanakkor a Föld-i iker nem tudván fizikailag érzékelni az űrhajóbéli iker időütemét semmiféle fizikai változást nem történhet meg.

Az állandó sebességgel történő haladás és a gyorsulás csak akkor manifesztálódik a két ember részére kölcsönösen, ha távközlés révén a tudomásukra jut, azonban a tudat ilyen behatásokra nem képes biológiai változások rapid végrehajtására, az pedig még kevésbé reális, hogy az egész Föld pusztán az információ hatására egy döntően

másik időpontba kerüljön át, ez ugyanis maga az időutazás lenne, aminek jelenleg semmiféle fizikai alapját és végbemenetelét nem ismerjük és tapasztalati tények sem támasztják alá.

Ennek pedig messzeható következménye az, hogy a csillagközi térben történő repülés semmiféle különleges jelenséggel nem jár azaz a fénysebesség átléphető nem felső határ, aminek következménye a csillagközi repülés elvi korlátainak megszűnése.

A fenti ellenvetéseknél azonban sokkal fontosabb, hogy az utóbbi évtizedben a csillagászat jelentős eredményekre jutott:

1. Kiderült, hogy az Univerzum tágulása és tágulás gyorsulása folyamatos tart, mivel tömegének nagyobbik része mintegy a barionos anyagnál hat-hétszer nagyobb sötét anyag, így létezik a kozmológiai állandó Λ és kozmológiai anyag Ω .
2. A világegyetem geometriája jó közelítéssel **euklideszi**.[¶]

Önmagában a fenti két felismerés is értelmetlenné teszi a speciális relativitás elmélet korlátozó tételeit a rakétarepülésre a galaktikus térben, azonban a galaxisokon belül a gravitációs tér a gravitációs csomósodások következtében már nem tisztán euklideszi a tér, hanem különféleképp görbült, ezért ott nem az euklideszi tér, hanem az elliptikus Riemann tér a használható, nem szabad elfelejteni, hogy az euklideszi tér valójában az elhanyagolható görbületű Riemann tr. A Riemann térben viszont a rakéta idejének lassulása nem lép fel, amint azt az előző fejezetben levezettük, aminek következtében a rakéta sebességét nem korlátozza semmi. Ha technikailag lehetséges bármekkora sebesség elérhető, természetesen ennek esetleg korlátot szabhat az említett sötét anyag, mely nem csatolódik a barionos anyaghoz a fénysebesség alatt. Elképzelhető, hogy a fénysebesség felett a csatolási viszonyok megváltoznak és nem ismert jelenségek lépnek fel, mivel a sötét anyag a gravitációs kölcsönhatásban már részt vesz.

Itt érdemes azt is leszögezni, hogy a súlyos testek pályái, tehetelenségi mozgás során a geodétikus pályán haladnak ami a legrövidebb út. Azonban itt újra érdemes felidézni a korábban már említett (Dodson-Potson: Tenzoranalízis című művében tett megállapítását : A geodétikus útvonalak közül a időgeodétikusok a leghosszabbak, ez ugyanis azzal is jár, hogy nem tudjuk egy csillag felé az optimális utat követni.)

14.2. RAKÉTAREPÜLÉS A KOMPLEX EUKLIDESZI TÉRBEN

A rakétarepülés esetében a legnagyobb nehézséget az okozza, hogy a hajtóanyag véges mennyisége korlátozza a hatótávolságot, még akkor is ha teljes annihilációs segítségével fotonhajtást vesznek figyelembe. Ez azonban feltehetőleg nem igaz a rakéta annihilációs hajtóművel is repülhet korlátlan távolságra, mivel ha már igen nagy sebességgel repül, afféle porszívóként begyűjtheti az intersztelláris anyagot és sűritheti azt olymértékben, hogy az annihilációhoz szükséges *antianyag előállítható legyen*.

A rakétarepülésnél, amely az Univerzumban repül, az ott jellemző távolság, idő és sebessétparaméterek következtében minden további nélkül elhanyagolhatjuk a

[¶]Hivatkozás: [Németh Judit: Kozmológia az ezredfordulón. Fizikai Szemle 2000. szeptember. 297 o.

rakéta méreteit és pontszerű szabad részecskének tekinthetjük. Ha elsőrendben eltekintünk az intersztelláris térbeli gravitációs terek hatásaitól, amelyek a galaxisközi térben sokkal kisebbek mint a rakétahajtómű gyorsítása. Így a valódi helyzet a speciális relativitás-elméleti tárgyalástól egészen eltérően alakul, márcsak azért is mert a gyenge gravitációs terek miatt a tér még az einsteini elmélet szerint is nyugodtan tekinthető *Euklidesz-ínek*.

A helyzet annyiban is különleges, hogy a rakéta és a mindenkori környezet között nem történik energiacsere, a rakétából kilövelt hajtóanyag viszi magával a komplex energia-impulzust és a rakéta komplex energia-impulzusa csökken folyamatosan illetve a felvett tömeg ezt pótolja. (A számítás egyszerűsítése érdekében nem foglalkozunk a Föld felszín elhagyásának problémájával és a Föld gravitációs teréből történő kitöréssel, amelyre feltehetőleg nem a rakétahajtás a megfelelő megoldás.)

Meg kell említeni, hogy az *Einstein*-i elmélet szerint az idő múlása, legalábbis a biológiai rendszerek esetében a gyorsulástól függne, ugyanis az ikerparadoxon szerint a hosszú egyenes sebességgel repülő test, két rövid gyorsulási szakasszal kisebb életkort eredményezne mint a földi-állandó ekvivalens gravitációs térben történő tartózkodás, azaz az öregedés alapvető oka a gyorsulás és mivel a biológiai folyamatok egyértelműen kvantummechanikai folyamatokra vezethetők vissza, a kvantummechanikában is az idő múlása a gyorsulás függvénye illetve az ekvivalens gravitációs tér hatása. Nyilvánvaló, hogy az ekvivalens gravitációs tér hatása az egyes részecskék közti különbség eredményeképp jelenik meg mint romboló erő, ez a mikrorészecskék esetében csekély, de a nagy biológiai rendszerek esetében igen nagy. Ez a romboló erő mint az entrópia növekedése jelenik meg, minden esetben, ami az idővel valóban összefügg. Pl. a egyes nehéz magok spontán bomlása a gravitációs térben a magon belül felhalmozódó entrópia következménye is lehet, amely a kezdeti rendezettséget felborítja.

Mindezt figyelembe véve, az a jogos hipotézis is feltehető, az általános relativitás elmélet alapján, hogy a földi szerves életformák korlátozott élettartamának döntő oka a Föld nehézségi ereje, amely jelentős gyorsulásnak felel meg, furcsa módon ezt még senki sem állította és nem is próbálta meg vizsgálni, pedig *Einstein* állítása óta ennek legalábbis kutatott témának kellene lenni. Vajon miért nem figyelt fel erre senki sem ?!

A komplex impulzusvektor négyzetének reális része, az a mennyiség ami a valóságban mérhető, a rakéta mindenkori impulzusa és kinetikus energiája (a négyzetvektor reális része divergenciaszerű mennyiség és pontosan a divergenciával egyenlő, a négydimenziós euklideszi laplace operátorral szorozzuk a komplex impulzus-vektort):

A repülés során mindig a rakéta sajátrendszeréhez képest visz el a kilövelt hajtóanyag impulzust, a sajátrendszer sebessége mindig zérus, a kilövelt impulzus valódi tömeggel rendelkező hajtóanyag esetében természetesen elvitt impulzus mindig a rakéta aktuális sebességének függvénye, az aktuális sebesség kiszámítása a tömegviszonyok és a kiáramlás sebességéből számítható és a folyamatos transzformáció alkalmazásának segítségével hasonlítható a kiinduló helyzethez:

Mivel a szokványos rakéta tömege folyamatosan csökken, az állandósult kiáramló tömeg és annak állandó sebessége, következtében a rakéta gyorsulás a folyamatosan nő, arányosan a rakéta tömegének csökkenésével, amennyiben a rakéta induló tömegének 0.9-ed része hajtóanyag és „ $k = 0.00001 / \text{sec}$ „ akkor 90000 másodpercig tud a hajtómű működni. Amint ebből a becslésből is látható, a hajtómű teljes

működése valamivel több, mint egy földi nap, aminek első következménye, hogy vagy igen nagy rakéta készítése szükséges, vagy a kiáramló impulzus teljesítménynek kell sokkal nagyobbnak lenni. Ez „fotonhajtómű” esetén a röntgenhullámú elektromágneses impulzust jelent.

A legnagyobb energia mennyiség, az annihilációs folyamattal nyerhető, ami egyben a teljes hajtóanyag átalakulását jelenti röntgensuggárázássá. 1 g anyagmennyiségben lévő teljes energia az *Einstein-i képlet alapján*:

$$10^{-3}kg \times (3 \cdot 10^8)^2 \text{joule} = 9 \cdot 10^{13} \text{joule} \quad (14.2)$$

Amennyiben a kiáramló energia elektromágneses hullám, 1 kvantum energiája ha frekvenciája 10^{16} Hz:

$$h\nu = 10^{16} \times 6.365 \cdot 10^{-34} = 6.365 \cdot 10^{-18} \text{joule} \quad (14.3)$$

$$1g \text{ anyag} = \frac{9 \cdot 10^{13}}{6.365 \cdot 10^{-18}} \approx 1.4 \cdot 10^{31} \text{ kvantum} \quad (14.4)$$

$$1g \text{ anyag impulzusa} = \frac{h\nu}{c} = \frac{1.4 \cdot 10^{31}}{3 \cdot 10^8} = 4.67 \cdot 10^{22} \text{ mkg/s} \quad (14.5)$$

Ebből 1 másodperc alatt $c = 3 \cdot 10^8$ méter hosszúságú csóva áramlik ki, amelyben röntgenhullámok kerülnek kisugárázásra $\lambda_R = 10^{-9}m$, tehát a kisugárzott röntgen fotonok száma másodpercenként $N_R = c/\lambda_R \approx 3 \cdot 10^{17}$, azaz egyetlen röntgen sugár 0.3 joule energiát illetve 0.3 newton visszaható erőt képvisel. Ha a rakéta 10^9 kg tömegű, akkor minimálisan 10^{10} számú röntgen sugárnak kell lennie, hogy a rakétát meg tudja emelni, azaz 10^{10} kvantumnak kell keletkezni, ami másodpercenként nyilvánvalóan 10^{10} számú annihilációt jelent, és azt is jelenti, hogy az elfogyasztott üzemanyag a gramm törtrésze, de a hajtóerő mindössze 10000 newton és a gyorsulás is csekély 0.001 m/s^2 , ami azt jelenti, hogy közel 10000-szeresére kell növelni a fotonhajtómű teljesítményét, hogy a gyorsulás elérje a 9.81 m/sec^2 nagyságot. Itt figyelembe kell venni, hogy a rakéta sebességét mekkorának kell választani, hogy valóban emelkedjen. (Persze ez már az eddigi tapasztalatokból is ismert.)

14.3. Túl a fénysebességen

Ismét érdemes idézni az *Einstein-féle ekvivalencia elv krikáját*:

„Kétségtől van lokális egyenértékűség a gyorsulás és a gravitáció között. Ez abban jut kifejezésre, hogy a tér egy elhatárolt tartományában a gravitációs erőteret egy gyorsulási erőter kikapcsolhatja. (pl. a súlytalanság állapota a szputnyik belsejében)”

Ez azért lényeges, mivel a fénysebesség közelében és azon túl a egy test csak akkor növelheti sebességét ha, belső energia felhasználásával teszi ezt, mivel ha gyorsabban halad mint környezetében bármi, onnan nem tud további, gyorsításhoz felhasználható energiához jutni.

Másrészt a gravitációtól átszőtt görbült terekben, általában is lehetetlen a geodetikus pályák görbült, többnyire elliptikus vonalát felhasználni,

különösen nem lehet a fényszerű geodeti-kusok felhasználása megcélözva egy távoli csillagot.

Éppen ezért merev metrikájú koordináta rendszert kell felhasználni, melynek zérusa az aktuális tartózkodás helye, amely nem lehet nagy görbültségű-gravitációjú hely, és például az „ \mathbf{x} ” tengely távoli pontja egybeesik a kitűzött célponttal, amely egy csillag. Ennek alapfeltétele egyenes koordináta rendszer megalkotása a görbült térben. Ennek természetesen az a következménye, hogy a görbült geodetikus történő repülés nem igényel energiát, de a gravitációs görbék átmetszése, mivel minden görbe eltérő növekvő vagy csökkenő potenciállal rendelkezik energia felhasználással jár. Itt természetesen ismét fel kell hívni a figyelmet a sötét anyag és energia szerepére, mivel mindkettő gravitációs kölcsönhatással rendelkezik, ez ténylegesen feltehető a Naprendszerek határain és a galaxisok közti térben, már csak a rendkívüli távolságok okozta hatáshalmazódás miatt is.

Éppen ezért, az extrém sebességek eléréséhez a merev metrikájú koordináta rendszerekbe kell elhelyezni a csillagközi tér *Riemann-geometriával leírt* görbült terét, azaz a görbült térben görbült pályák érintőinek egymásutánja kell hogy alkossa a pályát, amelynek mentén a rakéta megteszi a legrövidebb utat, ennek következménye az energia felhasználás. Azaz nem a téridőben jelölik ki a pályát, hanem a sebességtérben. Mivel a sebességtér állandóan változik, így a folyamatosan változó gyorsulás a hajtómű folyamatos navigáló jellegű működése valószínűleg szükséges.

$$\boxed{\text{Riemann-geometria} \Rightarrow \text{Merev metrikájú-geometria}}$$

transzformációt kell végrehajtani, annak érdekében, hogy az alkalmas pályát meghatározhasuk. Erre két geometria áll rendelkezésünkre az *Euklidesz-féle és a Minkowski féle*. Korábban már láttuk, hogy mindkettőnek létezik a fénysebesség feletti transzformációja. A sebesség a geodetikus érintője.

Minkowski geometria-hiperbolikus komplex számok:

Komplex transzformáló vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{Mtx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} + \mathbf{i} \frac{v_0/c}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \\ \mathbf{s}_{Mxt} &= \frac{c/v_0}{\sqrt{v_0^2/c^2 - 1}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{v_0^2/c^2 - 1}} \end{aligned}$$

A transzformáló vektorszorzás:

$$\mathbf{S}_{tM} = \mathbf{s} * \mathbf{s}_{eM} \quad (14.6)$$

Abban az esetben ha $ct > x$, a transzformált elforgatott vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{tM} &= (ct_2 + \mathbf{i}x_2) \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{0x}^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_{0x}/c_0}{\sqrt{1 - v_{0x}^2/c_0^2}} \right) \\ \mathbf{S}_{tM} &= \frac{t_2 + x_2 v_{0x}/c_0^2}{\sqrt{1 - v_{0x}^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{x_2 + v_{0x}/c_0}{\sqrt{1 - v_{0x}^2/c_0^2}} \end{aligned}$$

Lorentz-Minkowski transzformáció: $x < ct$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{t_2 + x_2 v_{0x} / c_0^2}{\sqrt{1 - v_{0x}^2 / c_0^2}} \\ x_1 &= \frac{x_2 + v_{0x} / c_0}{\sqrt{1 - v_{0x}^2 / c_0^2}} \end{aligned} \quad (14.7)$$

Ezek a klasszikusnak számító Lorentz - transzformáció formulái.

A nem klasszikus, fénysebességnél nagyobb sebesség esetén, azaz, amikor $x > ct$, a transzformált forgatott vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{tM} &= (x_2 + \mathbf{i}c_0 t_2) \left(\frac{c_0 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} \right) \\ \mathbf{S}_{tM} &= \frac{x_2 c_0 / v_1 + t_2 c_0}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} + \mathbf{i} \frac{x_2 + t_2 c_0^2 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} \end{aligned}$$

Lorentz-Minkowski transzformáció: ha $ct < x$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{x_2 c_0 / v_1 + t_2 c_0}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} \\ x_1 &= \frac{x_2 + t_2 c_0^2 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} \end{aligned} \quad (14.8)$$

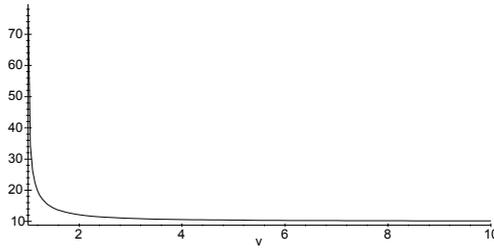
Ezek a nemklasszikusnak számító Lorentz - transzformáció formulái, a tér - idő komponensek transzformáló összefüggése. Nagyon fontos ismételt felhívni itt a figyelmet arra, hogy a fenti transzformációs formula nem más mint a Lorentz transzformáció abban az esetben ha $v > c$ vagyis a speciális relativitás elmélet szerinti nem létező esetre, vagy másképpen a Lorentz transzformáció kibővítése a fénysebességnél nagyobb sebességek esetére.

14.4. Minkowski transzformáció ábrái, ha $v \geq c_0$:

Az alábbi ábrákban az idő és a távolság relatív egységekben van megadva mivel a fénysebesség $c_0 \equiv 1$

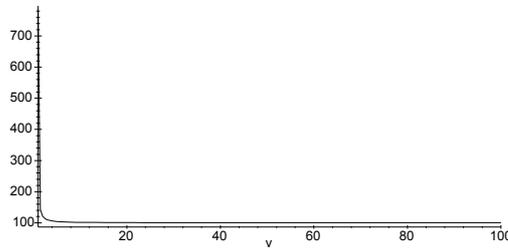
A 2-es indexű paraméterek $v > c_0$ - al haladó K_2 , míg az 1-es indexek önkényesen nyugvónak tekintett K_1 paraméterei. Az alábbi ábrákon az y és a z tengelyek jelentik mindig a transzformált paraméter, a megfigyelő észlelt paraméterét.

$$\boxed{t_1 = \frac{t_2 + x_2 v_{0x} / c_0^2}{\sqrt{v_{0x}^2 / c_0^2 - 1}}} \Rightarrow \frac{1 + 10 * v}{\sqrt{v^2 - 1}} \Downarrow$$



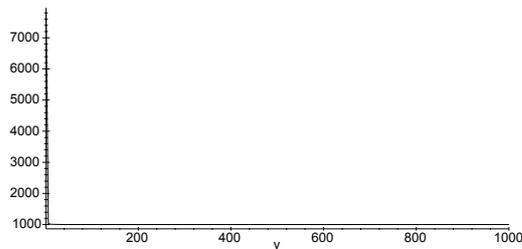
A t_2 idő transzformációja, ha $t_2=1$ és $v \rightarrow 10$.

$$t_1 = \frac{t_2 + x_2 v_{0x} / c_0^2}{\sqrt{v_{0x}^2 / c_0^2 - 1}} \Rightarrow \frac{10 + 100 * v}{\sqrt{v^2 - 1}}$$



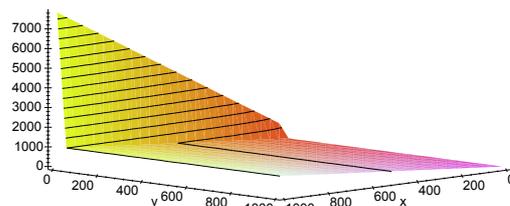
A t_2 idő transzformációja, ha $t_2=10$ és $v \rightarrow 100$.

$$t_1 = \frac{t_2 + x_2 v_{0x} / c_0^2}{\sqrt{v_{0x}^2 / c_0^2 - 1}} \Rightarrow \frac{100 + 1000 * v}{\sqrt{v^2 - 1}}$$



A t_2 idő transzformációja, ha $t_2=100$ és $v \rightarrow 1000$.

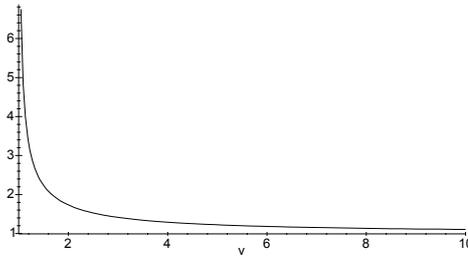
$$t_1 = \frac{t_2 + x_2 v_{0x} / c_0^2}{\sqrt{v_{0x}^2 / c_0^2 - 1}} \Rightarrow \frac{100 + x * v}{\sqrt{v^2 - 1}}$$



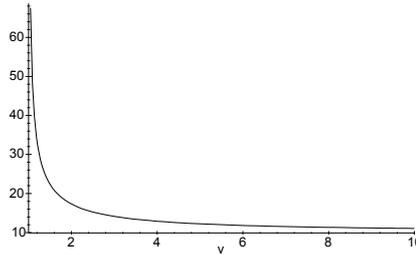
A transzformált idő ha $t_2 = 100$ és $v=1 \rightarrow 1000$

Az ábrák, a t_2 idő transzformált értékeit ábrázolják a sebesség függvényében. A transzformált értékek, melyek egy lassan gyorsuló K_2 koordináta-rendszerből K_1 koordináta rendszerben történő megfigyelés t_1 idő-adatait ábrázolják, a „ v ” függvényében.

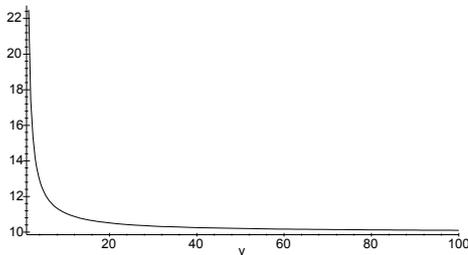
$$x_1 = \frac{x_2 + t_2 c_0^2 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} \Rightarrow \frac{1 + 1 * v}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

A tér transzformációja $x_2 = 1$ és $t_2 = 1$

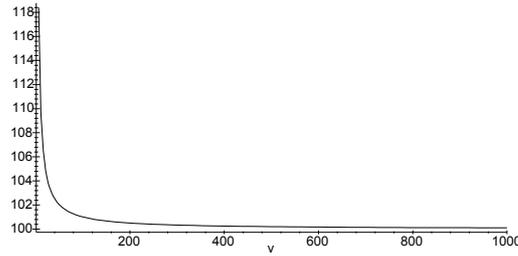
$$x_1 = \frac{x_2 + t_2 c_0^2 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} \Rightarrow \frac{10 + 10 * v}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

A tér transzformációja $x_2 = 10$ és $t_2 = 10$

$$x_1 = \frac{x_2 + t_2 c_0^2 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} \Rightarrow \frac{10 + 10 * v}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

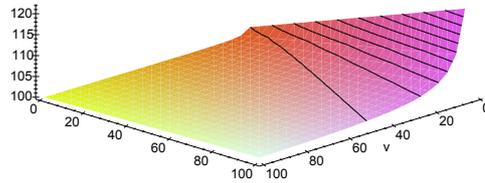
A tér transzformációja $x_2 = 10$ és $t_2 = 10$ $v=1 \rightarrow 100$

$$x_1 = \frac{x_2 + t_2 c_0^2 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} \Rightarrow \frac{100 + 100 * v}{\sqrt{v^2 - 1}}$$



A tér transzformációja $x_2 = 100$ és $t_2 = 100$ $v = 1 \rightarrow 1000$

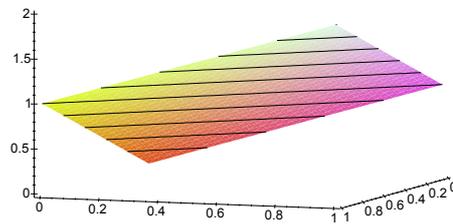
$$\boxed{x_1 = \frac{x_2 + t_2 c_0^2 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}}} \Rightarrow \frac{x_2 + 100 * v}{\sqrt{v^2 - 1}}$$



A tér transzformációja $x_2 = 0 \rightarrow 100$ és $v = 1 \rightarrow 100$

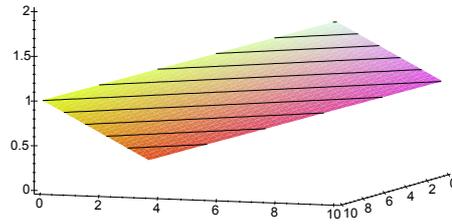
Az fenti ábrák, amely a *tér* x_2 koordináta a sebesség függvényében a transzformált értékeket ábrázolják. A transzformált értéket, egy lassan gyorsuló K_2 koordináta-rendszerből K_1 koordináta rendszerben történő megfigyelés, az „y” és „z” tengelyeken transzformáció x_1 koordináta adatait ábrázolják.

$$\boxed{x_1 = \frac{x_2 + t_2 c_0^2 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}}} \Rightarrow \frac{x_2 + t_2}{\sqrt{1.4142^2 - 1}}$$



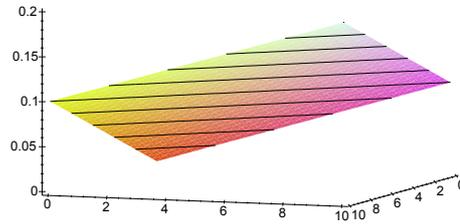
A tér-idő transzformációja, ha $v = \sqrt{2}$

$$\boxed{x_1 = \frac{x_2 + t_2 c_0^2 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}}} \Rightarrow \frac{x_2 + t_2}{\sqrt{10^2 - 1}}$$



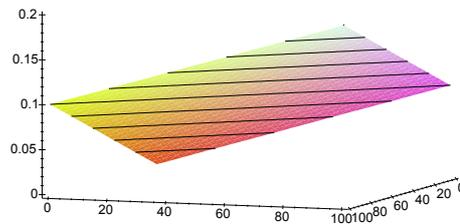
A tér-idő transzformációja, ha $v=10$

$$x_1 = \frac{x_2 + t_2 c_0^2 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} \Rightarrow \frac{x_2 + t_2}{\sqrt{100^2 - 1}}$$



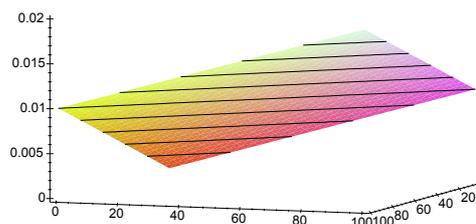
A tér-idő transzformációja, ha $v=100$

$$x_1 = \frac{x_2 + t_2 c_0^2 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} \Rightarrow \frac{x_2 + t_2}{\sqrt{1000^2 - 1}}$$



A tér-idő transzformációja, ha $v=1000$

$$x_1 = \frac{x_2 + t_2 c_0^2 / v_1}{\sqrt{v_1^2 / c_0^2 - 1}} \Rightarrow \frac{x_2 + t_2}{\sqrt{10000^2 - 1}}$$



A tér-idő transzformációja, ha $v=10000$

Az fenti ábrák, amely a *változó tér* x_2 és t_2 koordináták transzformált értékeit ábrázolják. A transzformált értékek, egy lassan gyorsuló K_2 koordináta-rendszerből K_1 koordináta rendszerben történő megfigyelés és transzformáció x_1 koordináta adatait ábrázolja az „y” és „z” tengelyeken.

14.5. Euklideszi transzformáció ábrái $v > c_0$

A transzformáló vektorszorzás:

$$\mathbf{S}_{tE} = \mathbf{S} * \mathbf{S}_{Et_x}$$

$$\mathbf{S}_{tE} = (c_0 t_2 + \mathbf{i} x_2) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{v_{0x}/c_0}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}} \right)$$

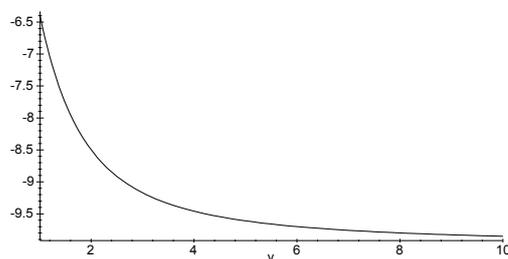
$$\mathbf{S}_{tE} = \frac{t_2 - x_2 v_{0x}/c_0^2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}} + \mathbf{i} \frac{x_2 + v_{0x} t_2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}}$$

$$\boxed{t_1 = \frac{t_2 - x_2 v_{0x}/c_0^2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}}} \quad (14.9)$$

$$\boxed{x_1 = \frac{x_2 + v_{0x} t_2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}}}$$

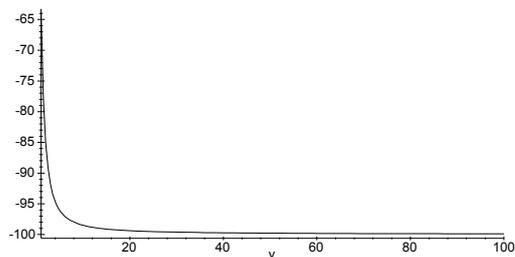
Transzformált idő és távolság változásai a fénysebesség átlépése után, az origóban mindenütt $c_0 \equiv 1$

$$\boxed{t_1 = \frac{t_2 - x_2 v_{0x}/c_0^2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}}} \Rightarrow \frac{1 - 10 * v}{\sqrt{1 + v^2}}$$



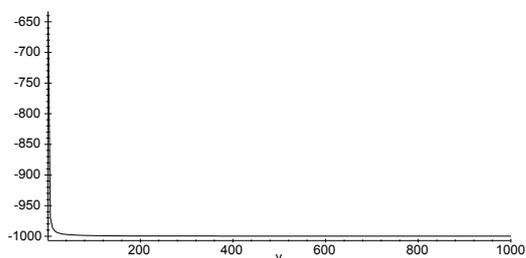
Idő transzformáció $t_2=1$ $v \rightarrow 10$

$$\boxed{t_1 = \frac{t_2 - x_2 v_{0x}/c_0^2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}}} \Rightarrow \frac{10 - 100 * v}{\sqrt{1 + v^2}}$$



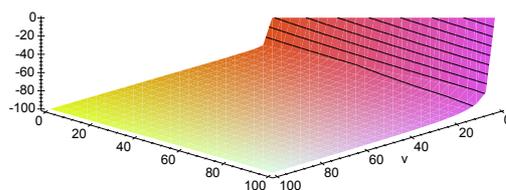
Idő transzformáció $t_2=10 \quad v \rightarrow 100$

$$t_1 = \frac{t_2 - x_2 v_{0x} / c_0^2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2 / c_0^2}} \Rightarrow \frac{100 - 1000 * v}{\sqrt{1 + v^2}}$$



Idő transzformáció $t_2=100 \quad v \rightarrow 1000$

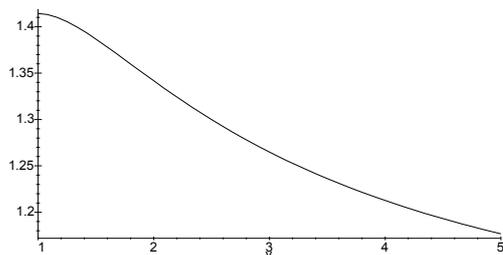
$$t_1 = \frac{t_2 - x_2 v_{0x} / c_0^2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2 / c_0^2}} \Rightarrow \frac{t_2 - 100 * v}{\sqrt{1 + v^2}}$$



Idő transzformáció $t_2 \rightarrow 100$ és $v \rightarrow 100$.

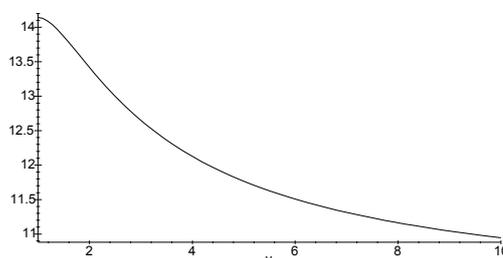
Az ábrák, a t_2 idő transzformált értékeit ábrázolják. A transzformált értékek, egy lassan gyorsuló K_2 koordináta-rendszerből K_1 koordináta rendszerben történő megfigyelés t_1 idő-adatait ábrázolják, az „y” és „z” tengelyeken.

$$x_1 = \frac{x_2 + v_{0x} t_2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2 / c_0^2}} \Rightarrow \frac{1 + 1 * v}{\sqrt{1 + v^2}}$$



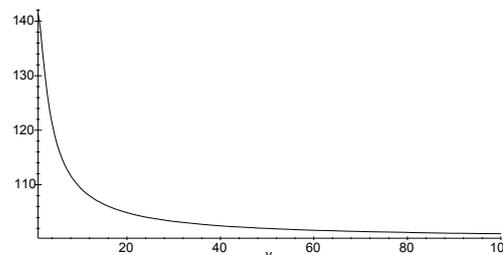
A távolság változása ha $v > c_0$, $x_2 = 1$.

$$x_1 = \frac{x_2 + v_0 x t_2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2 / c_0^2}} \Rightarrow \frac{10 + 10 * v}{\sqrt{1 + v^2}}$$



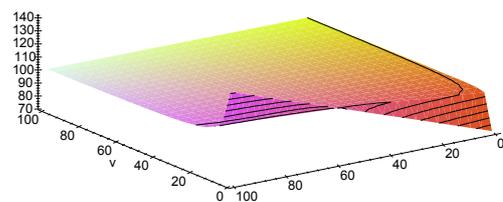
A távolság változása ha $v > c_0$, $x_2 \rightarrow 10$.

$$x_1 = \frac{x_2 + v_0 x t_2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2 / c_0^2}} \Rightarrow \frac{100 + 100 * v}{\sqrt{1 + v^2}}$$



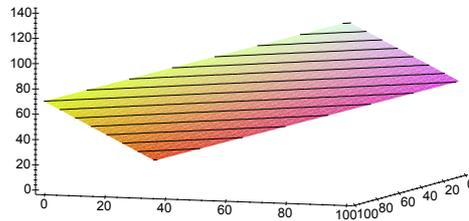
A távolság változása ha $v > c_0$, $x_2 \rightarrow 100$.

$$x_1 = \frac{x_2 + v_0 x t_2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2 / c_0^2}} \Rightarrow \frac{x_2 + 100 * v}{\sqrt{1 + v^2}}$$



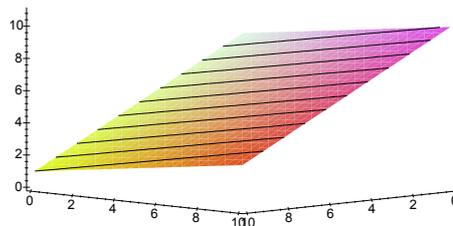
A távolság változása ha $v = 100 * c_0 > c_0$, $x_2 \rightarrow 100$.

$$x_1 = \frac{x_2 + v_{0x}t_2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}} \Rightarrow x_1 = \frac{10 + t_2}{\sqrt{1 + 1}}$$



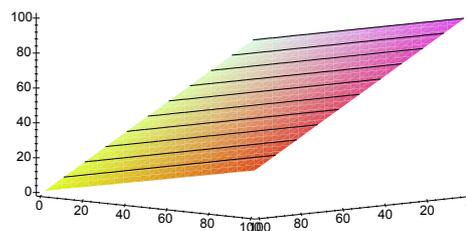
A távolság x_2 és idő t_2 transzformációja $v = 1$

$$x_1 = \frac{x_2 + v_{0x}t_2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2 + 10 * t_2}{\sqrt{1 + 10^2}}$$

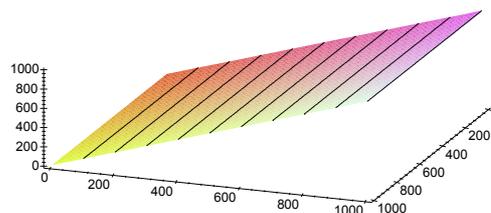


A távolság x_2 és idő t_2 transzformációja $v = 10$

$$x_1 = \frac{x_2 + v_{0x}t_2}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/c_0^2}} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2 + 100 * t_2}{\sqrt{1 + 100^2}}$$



A távolság x_2 és idő t_2 transzformációja $v = 100$



A távolság x_2 és idő t_2 transzformációja $v = 1000$

Néhány megjegyzés a fenti ábrákhoz:

1. Jól megfigyelhető, hogy minden transzformáció a fénysebességtől távol lineáris transzformáció és csak a fénysebesség közelében kisebb-nagyobb értékeknél nemlineáris a transzformáció, sőt a fénysebesség pontos értékénél szingularitás van, amelynek azonban nincs ismert és magyarázott értelme, mivel az alkalmazott és nyilvánvalóan a nem pontos matematikai modell következménye. Erre a matematikai modellre még pontos elemzés nem készült, mivel eddig csak a részecske fizikában érték el az ultra-relativisztikus sebességeket, de ezek pontszerű testek a tárgyalt űrrepülő testekhez képest, ezért az esetleges hipotézisek megalapozása még el sem kezdődött.
2. Az ábrákon , amely a tér $x_2 \Rightarrow 0..1000$ és $t_2 \Rightarrow 0..1000$ változó tartományok koordináta transzformáció értékeit ábrázolja. A transzformált értékek, melyek egy lassan gyorsuló K_2 koordináta-rendszerből K_1 koordináta rendszerben történő megfigyelés x_1 -koordináta adatait ábrázolja a „z” tengelyen. ez minden esetben jellemző.
3. A *Minkowski és az Euklidesz* transzformációk alapján ábrázolt „ c_0 ”-nál nagyobb sebességgel haladó rakéták, tehát tudnak a fénysebességnél gyorsabban repülni, ha az „üres” téridőben lévő sötét anyag és energia ennek lényeges megzavarását nem okozza. Ebben az esetben a fény feltehetőleg nem más, mint *ennek az anyagi jelenségnek rezonancia formája*, természetesen jelenleg pusztán hipotézis, amely semmiképp sem helyettesíti a tapasztalatból származó észlelést és mérést: ami minden fizikai elmélet legfontosabb része. A fentiekben leírtak csupán elméleti megfontolások remélhetően részben helyesek.
4. Feltételezhető, hogy a fénysebesség elérése után, a fotonhajtómű már további gyorsításra nem lesz alkalmas, ezért szükségessé válhat a sötét anyag-energia közvetlen tanulmányozása, annak érdekében, hogy gravitációs hajtómű kidolgozásához és alkalmazásához közvetlen kísérleti tapasztalatok megszerzése érdekében. Ezért egy közönséges segédrakétára lesz szükség ami a fénysebesség fölé tudja valamelyest gyorsítani a rakétát. Azonban itt fontos megjegyezni, hogy az 1. és 2. mellékletekben kimutatott időlassulás jelensége ténylegesen létezik-e? Ennek érdekében egy hagyományos kísérleti-rakétát, kell kilőni a haladási irányban, amely gyorsítani és fordulás után vissza is tud térni. Amennyiben ez a rakéta visszatér a nevezett jelenség nem veszélyes, ha nem tér vissza akkor az időlassulás jelensége létezik és csak nagy gyorsítással szabad átlépni, amire a hagyományos segédrakéta nem képes. Tehát vissza kell térni, hogy a tapasztalatok alapján megfelelő segédrakétát vagy a fotonhajtómű átalakítását végrehajtsák.

15. fejezet

ZÁRSZÓ-UTÓSZÓ

15.1. ZÁRSZÓ

V. P. VIZGIN 1981-ben kiadott egy fizika tudománytörténeti művet **A MODERN GRAVITÁCIÓ ELMÉLET KIALAKULÁSA** címen, amelyben igen részletesen feldolgozta és részben kommentálta a tudományos hitelesség szempontjából a nagyjából 1900-1920 közti relativitás történeti-történelmi eseményeket.

- Az első és második idézet Einstein nyilatkozatából való, melyben Einstein 1909-1912 közti matematikai töprengéseit körvonalazza, itt feltehető a kérdés vajon miért töltött el 3 évet Einstein, egy olyan differenciálméleti problémán, mikor az általa közlelő ismert *Grosmann* azt néhány nap alatt megválaszolta:
”Hogyan szólnak azok a differenciális törvények, amelyek magát a Riemann-metrikát (azaz a $g_{\mu\nu}$ -ket) meghatározzák?”
- Továbbá: miért állítja Einstein egy oldallal előbb (a 253. oldal közepén), a fenti kérdéssel kapcsolatban:
”E kérdéseken dolgoztam 1912-től 1914-ig barátommal Marcel Grossmann-nal. Azt találtuk, hogy a probléma megoldásának módszere Ricci és Levi-Civita infinitézimális differenciális differenciál-számításában már készen áll.” (Körülbelül az 1901. év óta.)
- Grossmann ugyanis nem kívánt Einsteinnel együtt dolgozni és Einstein ”gyenge” matematikus volt, ami már a speciális relativitás elmélet során kiderült, ahol a felesége volt a matematikai ”bedolgozó”, 1905 után azonban ismeretlen okok miatt összevesztek. Ekkor kezdett Grossmann-nal dolgozni, de rossz tapasztalatai miatt Grossmann a közös munkát megszakította, ezért volt kénytelen Einstein 1912-ben őt felkeresni, és nem fordítva, az idézetből kitűnik Grossmann segíteni hajlandó volt, de közös munkára nem. Ez tükröződik az alábbi két idézetből. (Az idézetek egy tényleges Einstein nyilatkozat részei, de a könyvben a második már a következő oldalon van.)
- Első idézet:

Ez a föladat járt a fejemben, amikor 1912-ben fölkerestem régi egyetemi barátomat, Marcel Grossmannt, aki addigra már a Szövet-ségi Polytechnikum matematikatanára lett. Azonnal föllekedett, bár mint igazi matematikus, a fizikával szemben kissé skeptikusan viseltetett. . . Így esett, hogy ugyan kész volt a problémán együtt dolgozni, de azzal a kikötéssel, hogy semmiféle felelősséget nem vállal semmiféle fizikai jellegű állításért vagy interpretációért. Átvizsgálta a szakirodalmat, s hamarosan kiderítette, hogy a jelzett matematikai problémát már megoldották, főként Riemann, Ricci és Levi-Civita. Ez az egész folyamat Gauss felületgörbületi elméletéhez kapcsoló-

- Második idézet:

dott. . . Riemann tette a legtöbbet. Kimutatta, hogyan lehet a g_{ik} -tér-ből másodrendű tenzorokat alkotni. Ebből meg lehetett érteni, milyeneknek is kell lenniük a gravitáció téregyenleteinek, ha megköveteljük az összes folytonos koordinátatranszformációval szembeni invarián-ciát. Nem volt azonban könnyű belátni, hogy e követelmény helyén-való, kivált, mert úgy hittem, indokot találtam ellene. Ezek a kétség-telenül téves megfontolások hozták magukkal, hogy az elmélet csak 1916-ban öltött végleges alakot.”

- Az alábbi idézet *Vizgin kommentárja*, amelyből kitűnik *Einstein* mélységes ra-gaszzkodása a speciális relativitás elméletének átemeléséhez az általános relativ-itás elméletbe.

Ezek a főleg fizikai nehézségek jelentősen gátolták a probléma meg-oldását. A kiutat Einstein valószínűleg Prágában, 1912 nyarán találta meg. Részletesen megvizsgálta a kinematikai eredetű „redukálható” nehézségi erőteret, s ennek során nem a koordinátákat (vagy különb-ségüket) mondta ki fizikailag mérhetőeknek, hanem a megfelelő négy-dimenziós téridő metrikáját. Legfontosabb eszköznek ebben a speciá-lis relativitáselmélet Minkowski-féle négydimenziós megfogalmazása bizonyult, amelyben a metrika az elmélet explicit alapjellemezőjeként szerepel, a tehetetlenség elve pedig egyszerű geometriai alakot kap.

- Ugyanakkor *Vizgin* így kommentálja *Einstein* későbbi véleményét:

– ”Az 1949-es Önéletrajzában Grossmannt meg se említi. Az általános rel-ativitáselmülethez vezető utat logikailag letisztultan írja le, s az 1912 és 1915 közti egész időszakot lényegében kihagyja.”

- Még néhány szó Grossmann-ról:

* Napjaink gravitációs szakemberei ismerik, és nagyra értékelik Grossmann-nak az általános relativitáselméletben játszott szerepét. 1975. július 7–12. közt ült össze a trieszti Elméleti Fizikai Intézetben az általános relativitáselmélet alapjainak modern fejlődéséről tartott első „Marcel Grossmann-találkozó”. A találkozó kiadványának rövid Grossmann-életrajzában olvashatjuk: „Amikor Einstein matematikailag meg akarta fogalmazni általános relativitáselméleti gondolatait, Grossmannhoz fordult segítségért. Grossmann vezette be Einsteint az Elwin Bruno Christoffel (1864) által kezdeményezett, majd a páduai egyetemen Gregorio Ricci-Curbastro és Tullio Levi-Civita által teljesen kidolgozott (1901) differenciálszámításba. Azáltal, hogy létrehozta az olasz geometerek matematikai eredményeinek és Einstein mély fizikai látásmódjának találkozását, Marcel Grossmann megkönnyítette a matematikai és elméleti fizika páratlan szintézisét, amelyet Einstein alkotott meg a fizika legelegánsabb és leghatékonyabb térelméletében, az általános relativitáselméletben.” [296, 2. o.] (Azóta öt ilyen találkozót rendeztek, a legutóbbit 1988-ban. I. J.)

Ezzel a művem befejeződött, a fentiekben lévő történet, a tudomány történetében korántsem ritka és nem is érdemel különösebb vitát. Egyetlen fontos kérdés van ezzel kapcsolatban: Mikor indul el az első Galaktikus Rakéta és mikor az első Intergalaktikus Jármű ?

15.2. UTÓSZÓ

1938-ban születtem és mára betegségeim sokaságának ellenére túléltem a magyar férfiak átlagéltkorát, ezt a könyvet, anyám emékeire ajánlom, ki nagyon szeretett és bízott a tehetségemben. A művet az Ő családnevén jegyzem, sajnos már hat éve meghalt, de mindvégig bízott bennem. A másik ilyen ember a második feleségem aki harminc éve bízik bennem, és nagyon betegen is segített előbbre jutni és bízott a végső sikerben. Neki köszönhetem a helyeirési hibák döntő részének kiirtását, és a formai elrendezés kedvezőbbé tételét.

1954-ben elsős gimnazistaként kikölcsönöztem egy Elméleti Fizika című körülbelül 600 oldalas könyvet, ha jól emlékszem orosz szerzőtől. Ezt nem véletlenül tettem, már évek óta rengeteget olvastam és nagyon gyorsan. Az első nehezebb könyv egy általános lexikon volt, mitegy tíz kötet, amit szócikkről-szócikkre módszeresen kb. két év alatt- végig olvastam, majd utána egy világtörténelmi sorozat következett és még sok más. Nem voltam válogatós mindent ami a kezembe került elolvastam. Persze nem csak olvasással telt a gyerekkorom, hanem minden egyéb szokásos, falusi környezetben megszokott tevékenységgel. Igen jó tanuló voltam, ez azzal az előnnyel járt, hogy mások otthoni tanulása számomra szabad idő volt.

Bár igen jó iskolai eredményeim voltak, de a gimnáziumba nehezen jutottam be, a szerencsém az volt, hogy egykori hatodikos osztályfőnököm, mikor találkoztam vele és megtudta, hogy nem vettek fel a gimnáziumba nyomban intézkedett és már fel is vettek. A gimnáziumban a tanulást könnyen vettem, matematikából kihasználva tanár sajátos módszerét, egy hónap alatt annyi ötöst szereztem, hogy a félévig többet nem is feleltem. Novemberben Varga fizika tanár úr egy összefoglaló kétórás dolgozatot íratott, aminek anyaga a Newton-i fizika elmélete volt, amire én úgy készültem, hogy biztam a padtársaim puskázási készségében. Azonban Varga tanár úr kiültetett

a szertárba egyedül, és ott végül is segítség nélkül maradtam. Mód felett felhábrod-
tam és az első órában nem csináltam semmit, akkor jött be a tanár megnézni mire
jutottam, látva az üres papírt roppant gúnyos megjegyzést tett. Ezen olyan nagy
mértékben feldühödtem, hogy összeszedve minden tudásomat megírtam a Newton-i
fizikát, de jelentősen eltértem a tankönyvi tárgyalási módtól. A következő órán az
érettségiig felmentett a fizika órákon való részvételtől. Ez nekem döbbenetes élmény
volt, ami egész életemet átszötte. Az érettségim nem az előírt anyagból húztam tételt,
hanem a bizottsági elnök engedélyével a nukleáris erőművek ismertetését adta fel-
adatul, ami nem okozott problémát (1957-ben).

A sikeres érettségi után az ELTE fizikus szakán felvételiztem, ahol a matem-
atika vizsgán összevettem a bizottsági elnökkel és az asztalhoz vágtam a krétát.
Természetesen ezután nem vettek fel és egy évet betanított segédmunkásként dol-
goztam. A következő évben a BME villamoskarára jelentkeztem, ahová maximális
pontszámmal azonnal felvettek. Nem szerettem az egyetemet, de vigyáztam arra,
hogy a jórendűséget megtartsam, mert csak így kaptam elegendő ösztöndíjat. Har-
madév végén magasabb ösztöndíjra lett szükségem és így négy évig hivatásos tiszt
lettem. Ott gyors karriert futottam be, de számora a katonai pálya - attasének akar-
tak kiképezni - nem felelt meg. Meg kell őszintén mondani, hogy az ellenszenv ellenére
nagyon sokat tanultam katonáéknál, a gyakorlati életből.

Ezután leszerelve, azonnal egy fejlesztési szervezetben csoportvezető lettem és
négy év múlva már négy találmányom volt, ami nagy anyagi előnyt jelentett. Ezután
úgy gondoltam ezt kell folytatni és akkor vissza térhetek a gyerekkori Elméleti Fizika
könyv, inspirálta tevékenységre az Einstein-féle speciális relativitás elmélet megcá-
folására, ami az első elolvasáskor felháborított és ténylegesen életcélá vált. A ka-
tonaságnál beszerzett súlyos betegségem miatt, ezt a célt nem tudtam igazán elérni
és egész addig kellett dolgozni míg nem bírva tovább az aktív munkával járó fizikai
megterhelést, orvosi javaslatra rokkant nyugdíjba mentem. Ez alatt az idő alatt
további öt találmányom született és jelentős szakmai megbecsülésre tettem szert,
ami bizonyos anyagi biztonságot jelentett. A 22 évnyi munkában töltött idő alatt pon-
tosan 22 különféle kitüntetést kaptam, ezentúl háromszor is megpróbáltak nagynevű
vezető(nyugati) elektronikai cégek elcsábítani magas vezetői pozícióba, amit én nem
fogadtam el.

Nyugdíjasan, amikor valamennyire javult az általános állapotom el, kezdtem
ezt a könyvet írni 1987 végén, azóta egyfolytában ezt csináltam, rendkívül sok ne-
hézségen, és igen sok félrevezető és nagyon nehezen leküzdhető nehézséggel találtam
szembe magam. A két alapvető nehézség a gyenge magyar szakmai irodalom és a
tudományos elit dogmatizmusa volt. Ma én úgy vélem ezzel sikeresen megbírkóztam
és valamiféle előrevivő művet sikerült létrehoznom. Ha ez csak kicsiny részben is
sikerült, már nem dolgoztam hiába. Sajnos lektort nem találtam, mivel öten adták
vissza a nagyjából kész anyagot azzal az indoklással, hogy számukra ez túlságosan
sok munkát jelentene, lehet, hogy alaposabban kellett volna keresnem. De most ez már
lehetetlen, mert olyan mértékben legyengültem és tehetetlenné váltam, hogy többet
már ebben az ügyben tenni nem tudok, bármennyire szeretnék. Remélem ennek
ellenére hasznos valamit alkottam.

Budapest, 2006.július vége.